TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE - FEUILLE 8 & 9 & 10

Exercice 1: Lemme des cinq.

Soit R un anneau commutatif. On considère le diagramme commutatif suivant dans lequel les lignes sont exactes:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "a_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "a_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \end{tikzcd}.$$

(1) Montrer que si f_1 est surjective, et f_2, f_4 sont injectives, alors f_3 est injective.
(2) Montrer que si f_5 est injective, et f_2, f_4 sont surjectives, alors f_3 est surjective.
(3) En déduire que si f_1, f_2, f_4, f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 aussi.

Comme application, montrer que si $f : (X, A) \to (Y, B)$ induit deux équivalences d'homotopie $f : X \to Y$ et $f|_A : A \to B$, alors $H_n(f) : H_n(X, A, M) \to H_n(Y, B, M)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour tout groupe abélien M.

Exercice 2: Coefficients universels modulo m.

Soit (C_n, ∂_n) un complexe de $\mathbb{Z}$-modules libres et $m \in \mathbb{N}$ un entier.

(1) Montrer que la différentielle ∂_n induit une différentielle sur $C_n \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = C_n/mC_n$.
(2) Montrer qu'on a une suite exacte de complexes

$$0 \to C_* \to C_* \to C_* \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0.$$

(3) En déduire la suite exacte, dite des coefficients universels suivante:

$$0 \to H_n(C) \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to H_n(C \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \to H_{n-1}(C)[m] \to 0$$

où $M[m] = \{x \in M, mx = 0\}$ désigne la m-torsion d'un groupe abélien M.

Exercice 3: Coefficients universels - localisation.

Pour tout groupe abélien M, on note $M \otimes \mathbb{Q}$ le groupe formé des fractions $\frac{m}{n}$ avec $m \in M, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ modulo la relation d'équivalence $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'}$ s'il existe $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $rn'm = rm'n$. La structure de groupe sur $M \otimes \mathbb{Q}$ est induite par celle sur M.

(1) En supposant $M = \mathbb{Z}^r \oplus F$ avec F fini, calculer $M \otimes \mathbb{Q}$.
(2) Montrer que $\otimes\mathbb{Q}$ est un foncteur de la catégorie des groupes abéliens vers celle des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels.
(3) Montrer toute suite exacte de groupes abéliens $0 \to A \to B \to C \to 0$ induit une suite exacte $0 \to A \otimes \mathbb{Q} \to B \otimes \mathbb{Q} \to C \otimes \mathbb{Q} \to 0$. (On dit que le foncteur $\otimes\mathbb{Q}$ est exact).
(4) Montrer que pour tout complexe (C_n, ∂_n), on a $H_n(C \otimes \mathbb{Q}) = H_n(C) \otimes \mathbb{Q}$. On pourra considérer les suites exactes

$$0 \to B_n \to Z_n \to H_n \to 0 \text{ et } 0 \to Z_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0$$

Exercice 4: Caractéristique d'Euler.

Soit k un corps et (C_*, ∂_*) un complexe de k-espaces vectoriels de dimension finie pour lequel $C_n = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on a

$$\sum_n (-1)^n \dim_k C_n = \sum_n (-1)^n \dim_k H_n(C).$$

Ce nombre est appelé la caractéristique d'Euler et est noté $\chi(C)$.

Exercice 5: Complexes acycliques.

On dit que deux morphismes de complexes $f, g : (C_*, \partial_*^C) \to (D_*, \partial_*^D)$ sont homotopes s'il existe une homotopie reliant f et g. C'est-à-dire qu'il existe une suite $h_n : C_n \to D_{n+1}$ telle que

$$f_n - g_n = \partial_{n+1}^D \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n^C : C_n \to D_n$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On dit qu'un complexe C_* est acyclique s'il existe une homotopie reliant l'identité Id_{C_*} et 0.

(1) Montrer que si $f, g : (C_*, \partial_*^C) \to (D_*, \partial_*^D)$ sont homotopes, ils induisent les mêmes morphismes au niveau d'homologie. C'est-à-dire, on a
$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(C_*) \to H_n(D_*)$$
pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(2) Soir (C_*, ∂_*) un complexe de k-espaces vectoriels. Déduire que C_* est acyclique ssi $H_n(C_*) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(3) Soit C_* le complexe (infini à droite et à gauche) défini par le diagramme suivant
$$\cdots \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \cdots$$
Calculer son homologie en tout degré.

(4) Est-il acyclique?

(5) Soit A_n une suite arbitraire de groupes abéliens de type fini. Existe-t-il un complexe C_* de modules abéliens libres de type fini tel que $H_n(C_*) = A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 6: Composantes connexes par arcs.

Soit X un espace topologique et $(X_a)_{a \in \pi_0(X)}$ l'ensemble de ses composantes connexes par arcs. Montrer qu'on a l'isomorphisme
$$H_k(X, M) = \bigoplus_{a \in \pi_0(X)} H_k(X_a, M).$$

Exercice 7: Homologie relative. Soit $A \subset X$ une paire d'espace et $i : A \to X$ l'inclusion. Soit M un groupe abélien.

(1) Montrer que $H_n(X, A, M) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ssi $H_n(i)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Supposons que A est contractile. Calculer $H_n(X, A, M)$ en fonction de $H_n(X, M)$.

(3) Montrer que $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre dont on explicitera une base.

Exercice 8: Théorème d'Hurewicz. Soit X un espace topologique connexe par arcs muni d'un point base $x \in X$.

(1) Construire une application $\phi : \pi_1(X, x) \to H_1(X, \mathbb{Z})$ en associant à $[\gamma]$ le cycle $\gamma : [0, 1] \simeq \Delta^1 \to X$.

(2) Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes. Il induit un morphisme $\phi^{\mathrm{ab}} : \pi_1(X, x)^{\mathrm{ab}} \to H_1(X, \mathbb{Z})$ où $G^{ab} = G/[G, G]$ désigne l'abélianisé du groupe G.

(3) Choisissons pour tout $y \in X$ un chemin α_y reliant x et y puis définissons $\psi : C_1(X, \mathbb{Z}) \to \pi_1(X, x)^{\mathrm{ab}}$ par $\psi(\sigma) = \gamma_{\sigma(0)} \sigma \gamma_{\sigma(1)}^{-1}$. Montrer que ψ induit un morphisme sur $H_1(X, \mathbb{Z})$ qui est l'inverse de ϕ.

Exercice 9: Surfaces triangulées.

Soit $S = \coprod_{i \in I} \Delta_i^2 / \sim$ où I est un ensemble fini. On note F_i^j la j-ème face de Δ_i^2 et on fixe un appariement de l'ensemble des faces $F = \{F_i^j, i \in I, j \in \{0, 1, 2\}\}$.

La relation d'équivalence consiste à recoller deux faces appariées F_i^j et $F_{i'}^{j'}$ de la façon suivante: soit (j, k, l) (resp. (j', k', l')) les sommets de Δ_i^2 (resp. $\Delta_{i'}^2$) ordonnés cycliquement. On pose $(1 - t)e_k + te_l \sim (1 - t)e_{l'} + te_{k'}$, pour tout $t \in [0, 1]$.

(1) Montrer que S est une variété compacte de dimension 2 munie d'une décomposition cellulaire, on dit que S est triangulée.

(2) Montrer que $[S] = \sum_i \sigma_i$ définit un cycle dans $H_2(S, \mathbb{Z})$ où $\sigma_i : \Delta^2 \to S$ a pour image Δ_i^2.

(3) Montrer que si $p : \tilde{S} \to S$ est un revêtement de degré d, les relèvements des Δ_i fournissent une triangulation de $\tilde{S}$ et on a $p_*([\tilde{S}]) = d[S]$.

(4) Montrer que pour tout espace topologique X et pour toute classe $x \in H_2(X, \mathbb{Z})$, il existe une surface triangulée S et une application $f : S \to X$ telle que $x = f_*([S])$.