Exercice 1. (chasse du diagramme).

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "a_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "a_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "b_1"'] & B_2 \arrow[r, "b_2"'] & B_3 \arrow[r, "b_3"'] & B_4 \arrow[r, "b_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

(1)

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a_1(x_1) \overset{?}{=} x_2 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] \arrow[d, mapsto, bend right] & \overset{a_2(x_2)}{\overset{\shortparallel}{x_3}} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & a_3(x_3) = 0 \arrow[d, mapsto] \\
y_1 \arrow[r, mapsto] & f_2(x_2) \arrow[r, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

Soit $x_3 \in \mathrm{Ker}(f_3)$. Alors, $f_4 \circ a_3(x_3) = b_3 \circ f_3(x_3) = b_3(0) = 0$.

Puisque f_4 est injectif, on obtient $a_3(x_3) = 0$.

Donc, $x_3 \in \mathrm{Ker}(a_3) = \mathrm{Im}(a_2)$. Soit $x_2 \in A_2$ t.q. $a_2(x_2) = x_3$.

Alors, $b_2 \circ f_2(x_2) = f_3 \circ a_2(x_2) = f_3(x_3) = 0$.

Donc, $f_2(x_2) \in \mathrm{Ker}(b_2) = \mathrm{Im}(b_1)$. Soit $y_1 \in B_1$ t.q. $b_1(y_1) = f_2(x_2)$.

Puisque f_1 est surjectif, il existe $x_1 \in A_1$ t.q. $f_1(x_1) = y_1$.

Alors, on a $f_2 \circ a_1(x_1) = b_1 \circ f_1(x_1) = b_1(y_1) = f_2(x_2)$.

Puisque f_2 est injectif, cela implique $a_1(x_1) = x_2$.

Donc, $x_3 = a_2(x_2) = a_2 \circ a_1(x_1) = 0$ comme $a_2 \circ a_1 = 0$.

(2) Par la même méthode que (1).

(3) Corollaire direct de (1) et (2).

Application : (X, A) et (Y, B) induisent deux suites exactes longues d'homologie relative. L'application f induit un morphisme entre ces deux suites.

$$\begin{tikzcd}
H_n(A;M) \arrow[r] \arrow[d, "f_1 = (f|_A)_*"'] & H_n(X;M) \arrow[r] \arrow[d, "f_2 = f_*"'] & H_n(X,A;M) \arrow[r] \arrow[d, "f_3 = f_*"'] & H_{n-1}(A;M) \arrow[r] \arrow[d, "f_4 = (f|_A)_*"'] & H_{n-1}(X;M) \arrow[d, "f_5 = f_*"'] \\
H_n(B;M) \arrow[r] & H_n(Y;M) \arrow[r] & H_n(Y,B;M) \arrow[r] & H_{n-1}(B;M) \arrow[r] & H_{n-1}(Y;M).
\end{tikzcd}$$

Puisque $f : X \to Y$ et $f|_A : A \to B$ sont équivalences d'homotopie, les morphismes f_1, f_2, f_4, f_5 sont isomorphismes.

Donc, par (3) (lemme des cinq), f_3 est aussi un isomorphisme. $\square$

Exercice 2.

(1) $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ induit

$$\partial_n' := \partial_n \otimes Id_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} : C_n \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to C_{n-1} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

$$\partial_n' \circ \partial_{n+1}' = (\partial_n \circ \partial_{n-1}) \otimes Id_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} = 0.$$

(2) On a une suite exacte courte de $\mathbb{Z}$-modules :

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0. \qquad (*)$$

Puisque C_n est un $\mathbb{Z}$-module libre, on a $C_n \cong \mathbb{Z}^{\oplus I}$ pour certain ensemble I. Alors, $C_n \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\oplus I}$, et la suite

$$0 \to C_n \xrightarrow{\times m} C_n \to C_n \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$$

devient

$$0 \to \mathbb{Z}^{\oplus I} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z}^{\oplus I} \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\oplus I} \to 0.$$

Elle est exacte car elle est une somme directe de suites exactes courtes

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0.$$

Dans les suites exactes courtes

$$0 \to C_n \xrightarrow{\times m} C_n \to C_n \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

On peut vérifier que les morphismes commutent avec les différentielle ∂_n de C_* et ∂'_n de $C_* \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Donc, on obtien une suite exacte courte de complexes :

$$0 \to C_* \xrightarrow{\times m} C_* \to C_*/mC_* \to 0.$$

(3). On considère la suite exacte longue associée à la suite exacte courte ci-dessus, et on obtient

$$H_n(C_*) \xrightarrow[\varphi]{\times m} H_n(C_*) \to H_n(C_*/mC_*) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C_*) \xrightarrow{\times m} H_{n-1}(C_*) \quad \circledast$$

le morphisme induit par $\times m$ au niveau de C_* induit le morphisme $\times m$ au niveau de homologie.

Puisque, $\operatorname{Ker}\left(H_{n-1}(C_*) \xrightarrow{\times m} H_{n-1}(C_*)\right) = H_{n-1}(C_*)[m]$

$$\operatorname{Coker}\left(H_n(C_*) \xrightarrow{\times m} H_n(C_*)\right) = H_n(C_*)/mH_n(C_*) = H_n(C_*) \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

la suite exacte longue $\circledast$ implique la suite exacte courte suivante :

$$0 \to H_n(C_*) \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to H_n(C_* \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \to H_{n-1}(C_*)[m] \to 0.$$

$\square$.

Exercice 3.

(1) Pour F fini, on montre que $F \otimes \mathbb{Q} = 0$.

En fait, pour $\forall x \in F$. On définit $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow F$.

$$x \longmapsto nx$$

Si φ est injectif, alors $\mathbb{Z} \cong \mathrm{Im}(\varphi) \subseteq F$, cela contredit la finitude de F.

Donc φ n'est pas injectif. Soit $r \in \varphi$, alors $rx = \varphi(r) = 0$.

Par conséquent, on a

$$\frac{x}{n} = \frac{rx}{rn} = \frac{0}{rn} = 0 \in F \otimes \mathbb{Q}.$$

Puisque $F \otimes \mathbb{Q}$ est engendré par éléments de la forme $\frac{x}{n}$ avec

$x \in F$ et $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, on a $F \otimes \mathbb{Q} = 0$.

Il n'est pas difficile de vérifier que

- $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$

et
- $(M \oplus N) \otimes \mathbb{Q} \cong (M \otimes \mathbb{Q}) \oplus (N \otimes \mathbb{Q})$, $\forall M, N$ $\mathbb{Z}$-modules.

Donc, on obtient

$$M \otimes \mathbb{Q} = \left((\mathbb{Z}^{\oplus r}) \oplus F \right) \otimes \mathbb{Q} \cong (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q})^{\oplus r} \oplus (F \otimes \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^{\oplus r}.$$

(2) Soit $M \in \mathcal{Ab}$ = catégorie des gps abéliens = catégorie de $\mathbb{Z}$-modules.

On définit un produit scalaire sur $M \otimes \mathbb{Q}$ par

$$\lambda \cdot \alpha := \frac{px}{qm}$$

où (p, q) satisfont que $q \in \mathbb{Z}_{>0}$, $p \in \mathbb{Z}$, et $\frac{p}{q} = \lambda$.

On peut vérifier que cet produit scalaire est bien défini.

C'est-à-dire, il ne dépend pas du choix de p et q.

On vérifier que $M \otimes \mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Soient $\alpha, \beta \in M \otimes \mathbb{Q}$, et soit $\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Par définition, il existe $x, y \in F$ et $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, t.q. $\alpha = \frac{x}{m}$, $\beta = \frac{y}{n}$.

On obtient

(c'est la str. de gp sur $M \otimes \mathbb{Q}$ induite par celle sur M)

$$\alpha + \lambda \beta = \frac{x}{m} + \frac{py}{qn} \overset{\downarrow}{=} \frac{qnx + pmy}{mqn} = \frac{z}{N}$$

où $z = qnx + pmy \in F$, et $N = mqn \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Donc, $\alpha + \lambda \beta \in M \otimes \mathbb{Q}$.

(3) $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \;\to\; 0 \to A \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{f'} B \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{g'} C \otimes \mathbb{Q} \to 0$

a) g' est surjectif.

Soit $\alpha \in C \otimes \mathbb{Q}$. Il existe $z \in C$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.q. $\alpha = \frac{z}{n}$.

Puisque g est surjectif, il existe $y \in B$ t.q. $g(y) = z$.

Donc $g'(\frac{y}{n}) = \frac{g(y)}{n} = \frac{z}{n} = \alpha$

b) $\mathrm{Ker}(g') = \mathrm{Im}(f')$.

Puisque $g \circ f = 0$, on a $g' \circ f' = 0$, et donc $\mathrm{Im}(f') \subseteq \mathrm{Ker}(g')$.

En réciproque, soit $\alpha = \frac{y}{n} \in \mathrm{Ker}(g')$, où $y \in B$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Alors, on a $0 = g'(\alpha) = \frac{g(y)}{n} = \frac{0}{1} \in C \otimes \mathbb{Q}$

Donc, il existe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.q. $m \cdot g(y) = 0$ dans C.

Cela implique $g(my) = m \cdot g(y) = 0$, donc $my \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$.

Donc, il existe $x \in A$ t.q. $my = f(x)$.

Alors, on a $f'(\frac{x}{mn}) = \frac{f(x)}{mn} = \frac{my}{mn} = \frac{y}{n} = \alpha \in \mathrm{Im}(f')$.

Donc, on a $\mathrm{Ker}(g') \subseteq \mathrm{Im}(f')$.

c) f' est injectif.

Soit $\alpha \in \mathrm{Ker}(f')$. Il existe $x \in A$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.q. $\alpha = \frac{x}{n}$.

Alors, $0 = f'(\alpha) = \frac{f(x)}{n} \in A \otimes \mathbb{Q}$.

Donc, il existe $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.q. $m f(x) = 0$.

Il implique que $mx \in \mathrm{Ker}(f)$, et donc $mx = 0$ car f est injectif.

Donc, on a $\alpha = \frac{x}{n} = \frac{mx}{mn} = 0 \in A \otimes \mathbb{Q}$.

(4) On definit $Z_n = \mathrm{Ker}(\partial_n)$ et $B_{n-1} = \mathrm{Im}(\partial_n)$

Alors, $C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}$ est exacte implique que on a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{g_n} B_{n-1} \longrightarrow 0.$$

où f_n est l'inclusion, et g_n est induit par ∂_n.

(Il est exacte car ∂_n induit un isomorphisme

$$C_n/Z_n = C_n/\mathrm{Ker}(\partial_n) \longrightarrow \mathrm{Im}(\partial_n) = B_{n-1} \;).$$

Soit $i_n : B_n \to Z_n$ l'inclusion. Alors, par la definition d'homologie, on obtient une suite exacte courte

$$0 \to B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \to H_n(C_\cdot) \to 0.$$

On peut faire le diagramme suivant, qui est exact en tout terme. (horizontal et vertical)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & B_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[u] & Z_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & H_n(C_*) \arrow[r] & 0 & \\
 & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[u, "g_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "g_n"] & C_{n-1} & & \\
 & 0 \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"'] & Z_{n-1} \arrow[r] \arrow[u, "f_{n-1}"'] & H_{n-1}(C_*) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

Par (3), on peut $\otimes \mathbb{Q}$ et préserver l'exactitude.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & & \\
0 \arrow[r] & B_n \otimes \mathbb{Q} \arrow[u] \arrow[r, "i'_n"] & Z_n \otimes \mathbb{Q} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d, "f'_n"] & H_n(C_*) \otimes \mathbb{Q} \arrow[r] & 0 & \\
 & C_{n+1} \otimes \mathbb{Q} \arrow[u, "g'_{n+1}"] \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & C_n \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, "g'_n"'] & C_{n-1} \otimes \mathbb{Q} & & \\
 & 0 \arrow[r] & B_{n-1} \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, "i'_{n-1}"'] \arrow[d] & Z_{n-1} \otimes \mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[u, "f'_{n-1}"'] & H_{n-1}(C_*) \otimes \mathbb{Q} \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Par l'exactitude, les morphismes $f'_n, f'_{n-1}, i'_n, i'_{n-1}$ sont injectives et les morphismes g'_n et g'_{n+1} sont surjectives.

Donc, on obtient

$$\operatorname{Ker}(\partial'_n) = \operatorname{Ker}(f'_{n-1} \circ i'_{n-1} \circ g'_n) = \operatorname{Ker}(g'_n) = f'_n(Z_n \otimes \mathbb{Q})$$

$$\operatorname{Im}(\partial'_{n+1}) = \operatorname{Im}(f'_n \circ i'_n \circ g'_{n+1}) = f'_n(\operatorname{Im}(i'_n))$$

Puisque f'_n est injective, on a

$$H_n(C_* \otimes \mathbb{Q}) = \frac{\operatorname{Ker}(\partial'_n)}{\operatorname{Im}(\partial'_{n+1})} = \frac{f'_n(Z_n \otimes \mathbb{Q})}{f'_n(\operatorname{Im}(i'_n))} \underset{\substack{\text{induit} \\ \text{par } f'_n}}{\cong} \frac{Z_n \otimes \mathbb{Q}}{\operatorname{Im}(i'_n)} \underset{\substack{\text{par l'exactitude de la} \\ 1^{\text{er}} \text{ ligne du diagramme.}}}{\cong} H_n(C_*) \otimes \mathbb{Q}$$

$\square$.

Exercice 4.

Soit $Z_n := \mathrm{Ker}(\partial_n)$ et $B_n := \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$. Ils sont k-espaces vectoriels.

Alors, on obtient deux suites exactes courts comme dans Exercice 3.(c).

$$0 \to Z_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0 \qquad ①$$

et
$$0 \to B_n \to Z_n \to H_n(C_*) \to 0 \qquad ②$$

② implique que

$$\dim_k H_n(C_*) = \dim_k Z_n - \dim_k B_n .$$

① implique que

$$\dim_k Z_n + \dim_k B_{n-1} = \dim_k C_n .$$

Donc, on obtient

$$\sum_n (-1)^n \dim_k H_n(C_*) = \sum_n (-1)^n \left(\dim_k Z_n - \dim_k B_n\right)$$

$$= \sum_n (-1)^n \left(\dim_k Z_n + \dim_k B_{n-1}\right) = \sum_n (-1)^n \dim_k C_n .$$

□.

Exercice 5.

(1) Soit $\alpha \in \mathrm{Ker}(\partial_n^C : C_n \to C_{n-1})$, on a

$$f_n(\alpha) - g_n(\alpha) = \partial_{n+1}^D \circ h_n(\alpha) + h_{n-1} \circ \partial_n^C(\alpha)$$
$$= \partial_{n+1}^D \circ h_n(\alpha) \in \mathrm{Im}(\partial_{n+1}^D).$$

Par conséquent, on obtient

$$H_n(f)([\alpha]) = [f_n(\alpha)] = [g_n(\alpha)] = H_n(g)([\alpha]) \text{ dans } H_n(D_*),$$

et donc $H_n(f) = H_n(g)$.

(2) Si (C_*, ∂_*) est acyclique, on obtient par (1)

$$H_n(\mathrm{Id}_{C_*}) = H_n(0).$$

Donc, on a $\mathrm{Id}_{H_n(C_*)} = 0$, et donc $H_n(C_*) = 0$.

En réciproque, suppose que C_* satisfait $H_n(C_*) = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}$.
Alors, pour $\forall n \in \mathbb{Z}$, on obtient une suite exacte courte de k-espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \xrightarrow{i_n} C_n \xrightarrow{p_n} \mathrm{Im}(\partial_n) \longrightarrow 0.$$

Puisque C_n est un k-espace vectoriel, on a

$$C_n \cong \mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \oplus \mathrm{Im}(\partial_n)$$

⚠ Ce isomorphisme n'est pas canonique! On en fix un pour chaque n.

Soit $q_n : C_n \cong \mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \oplus \mathrm{Im}(\partial_n) \to \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ la projection

et $j_n : \mathrm{Im}(\partial_n) \to C_n$ l'inclusion.

Alors, on a
$$\begin{cases} p_n \circ j_n = Id_{Im(\partial_n)} & (1) \\ q_n \circ i_n = Id_{Im(\partial_{n+1})} & (2) \\ i_n \circ q_n + j_n \circ p_n = Id_{C_n} & (3) \end{cases}$$

On définit $h_n := j_{n+1} \circ q_n : C_n \to Im(\partial_{n+1}) \to C_n$.

On vérifie que $\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = Id_{C_n}$. (4)

En fait, en utilisant $\partial_n = i_{n-1} \circ p_n$, on obtient

$\partial_{n+1} \circ h_n = i_n \circ p_{n+1} \circ j_{n+1} \circ q_n = i_n \circ q_n$ par (1)

$h_{n-1} \circ \partial_n = j_n \circ q_{n-1} \circ i_{n-1} \circ p_n = j_n \circ p_n$. par (2)

Donc (4) découle de (3).

(3) $$H_n(C_*) = \frac{Ker(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})}{Im(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})} = \frac{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = 0$$

(4) Suppose qu'il est acyclique. Soit $\{h_*\}$ la homotopie entre Id_{C_*} et 0.

On a
$$Id_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = 2h_n + h_{n-1} \circ (2\times -) = 2(h_n + h_{n-1}) : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Mais l'image de $2(h_n + h_{n-1})$ est contenu dans $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, tandis que l'image de $Id_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$ est égal à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Une contradiction.

Donc (C_*, ∂_*) n'est pas acyclique.

(5) Puisque A_n est de type fini, il existe un $\mathbb{Z}$-module F_n fini et libre, avec une surjection $\alpha_n : F_n \to A_n$. Soit $K_n := Ker(F_n)$. Alors, K_n est aussi un $\mathbb{Z}$-module fini et libre, Donc, on obtient un complexe

$C(n)$ t.q. $$C(n)_m = \begin{cases} F_n & m = n \\ K_n & m = n+1 \\ 0 & m \notin \{n-1, n\} \end{cases}$$

$$C(n): \quad \cdots \to 0 \to \overset{(n+1)}{K_n} \longrightarrow \overset{(n)}{F_n} \longrightarrow 0 \to \cdots$$

Alors, $C(n)$ satisfait que $H_m(C(n)) \cong \begin{cases} A_n & m = n \\ 0 & m \neq n. \end{cases}$

On définit $C := \bigoplus_n C(n)$. Alors, pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$C_m = \bigoplus_n C(n)_m = F_m \oplus K_{m-1}$$

est un $\mathbb{Z}$-module libre et fini. Et on a

$$H_m(C) = \bigoplus_n H_m(C(n)) \cong A_m.$$

$\square$.

Exercice 6.

Soit $\sigma : \Delta^k \to X$ une application continue.

Puisque Δ^k est connexe par arc, $\mathrm{Im}(\sigma)$ est aussi connexe par arc.

Donc, il existe $a \in \pi_0(X)$ t.q. $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq X_a$.

Donc, on obtient

$$C_k(X;M) = \bigoplus_{a \in \pi_0(X)} C_k(X_a;M)$$

Et le morphisme $\partial_X : C_k(X;M) \to C_{k-1}(X;M)$ est la somme directe

de $\partial_{X_a} : C_k(X_a;M) \to C_{k-1}(X_a;M)$.

Donc, on a

$$\left(C_*(X;M), \partial_X\right) \cong \bigoplus_{a \in \pi_0(X)} \left(C_*(X_a;M), \partial_{X_a}\right)$$

comme complexes.

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} H_k(X;M) &= H_k\left(C_*(X;M), \partial_X\right) \\ &= \bigoplus_{a \in \pi_0(X)} H_k\left(C_*(X_a;M), \partial_{X_a}\right). \\ &= \bigoplus_{a \in \pi_0(X)} H_k(X_a;M). \end{aligned}$$

D.

Exercice 7.

(1) Il y a une suite exacte longue associée à la paire (X, A) :

$$\cdots \to H_{n+1}(X, A; M) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A; M) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X; M) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A; M) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A; M) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} H_{n-1}(X; M) \to \cdots \quad \circledast$$

Si $H_n(X, A; M) = 0$ pour tout n, alors $\circledast$ devient

$$\cdots \to 0 \xrightarrow{\delta} H_n(A; M) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X; M) \to 0 \to \cdots$$

Donc $H_n(i)$ est un isomorphisme pour tout n.

En réciproque, suppose que $H_n(i)$ est un isomorphisme pour tout n. $\circledast$ induite une suite exacte courte suivante :

$$0 \to \mathrm{Coker}(H_n(i)) = \mathrm{Im}(H_n(j)) \to H_n(X, A; M) \to \mathrm{Im}(\delta_n) = \mathrm{Ker}(H_{n-1}(i)) \to 0$$

Puisque $H_n(i)$ et $H_{n-1}(i)$ sont isomorphismes, $\mathrm{Coker}(H_n(i)) = \mathrm{Ker}(H_{n-1}(i)) = 0$.

Donc, on obtient une suite exacte courte

$$0 \to 0 \to H_n(X, A; M) \to 0 \to 0.$$

Cela implique que $H_n(X, A; M) = 0$.

(2) On a toujours la suite exacte longue $\circledast$:

$$\cdots \to H_n(A; M) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X; M) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A; M) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A; M) \to \cdots \quad \circledast$$

Puisque A est contractible, on a $H_n(A) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n > 0. \end{cases}$

Donc, pour $n \geq 2$, on a $H_n(A; M) = H_{n-1}(A; M) = 0$, et $\circledast$ implique que

$$H_n(X; M) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A; M)$$

est un isomorphisme.

Pour $n=1$, on a $H_1(A;M)=0$ et $H_0(A,M)\cong M$, et ⊛ implique que

$$\cdots \to 0 \xrightarrow{H_1(i)} H_1(X;M) \xrightarrow{H_1(j)} H_1(X,A;M) \xrightarrow{\delta} \underset{\underset{M}{\wr\wr}}{H_0(A;M)} \xrightarrow{H_0(i)} H_0(X;M) \to \cdots$$

Puisque $H_0(i) : H_0(A;M)\cong M \longrightarrow H_0(X;M)\cong \bigoplus_{a\in\pi_0(X)} M$ est injective,

($H_0(i)$ identifie $M\cong H_0(A;M)$ avec le facteur de $H_0(X;M)\cong \bigoplus_{a\in\pi_0(X)} M$

correspondant à la composante connexe de X qui contient A).

on a $\mathrm{Ker}(H_0(i))=0$ et donc $\delta=0$ et

$$H_1(X,A;M)\cong H_1(X;M).$$

⊛ aussi implique que

$$H_0(A;M)\xrightarrow{H_0(i)} H_0(X;M)\to H_0(X,A;M)\to 0.$$

Donc,

$$H_0(X,A;M)\cong \mathrm{Coker}(H_0(i))\cong \bigoplus_{a\in\pi_0(X)\setminus\{C_A\}} M$$

où $C_A\in\pi_0(X)$ correspond à la composante connexe qui contient A.

En résumé, on a

$$H_n(X,A;M)\cong \begin{cases} H_n(X;M) & n\geq 1 \\ \mathrm{coker}(M\to H_0(X;M))\cong \bigoplus_{a\in\pi_0(X)\setminus\{C_A\}} M & n=0 \end{cases}$$

(3) On considère la suite exacte longue associée à la paire $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$, et on obtient

$$H_1(\mathbb{R};\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_1(j)} H_1(\mathbb{R},\mathbb{Q};\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H_0(\mathbb{Q};\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(\mathbb{R};\mathbb{Z})$$

où j est l'inclusion de pairs $(\mathbb{R},\phi) \hookrightarrow (\mathbb{R},\mathbb{Q})$.

Puisque $\mathbb{R}$ est contractible, $H_1(\mathbb{R};\mathbb{Z})=0$, et on obtient

$$H_1(\mathbb{R},\mathbb{Q};\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ker}\left(\delta : H_0(\mathbb{Q};\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(\mathbb{R};\mathbb{Z})\right)$$

où $i : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est l'inclusion.

Parce que $\mathbb{Q}$ est discrets, on a

$$H_0(\mathbb{Q};\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{Z}.$$

Le morphisme $H_0(i)$ est donné par

$$\phi : \bigoplus_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{Z}\cdot[q] \cong H_0(\mathbb{Q};\mathbb{Z}) \longrightarrow H_0(\mathbb{R};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

$$\sum_{q\in\mathbb{Q}} a_q\cdot[q] \longmapsto \underbrace{\sum_{q\in\mathbb{Q}} a_q}$$

une somme finie puisque seuls un nombre fini de a_q sont non nuls.

Donc, $H_1(\mathbb{R},\mathbb{Q};\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ker}(\phi)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre avec une base définie par

$$\{[q]-[0],\ q\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}\} \subseteq \bigoplus_{q'\in\mathbb{Q}} \mathbb{Z}$$

$\square$.

Exercice 8.

(1) On vérifie que ϕ est bien défini. (Comme $\partial\gamma = x - x = 0$, γ représente un élément de $H_1(X;\mathbb{Z})$.

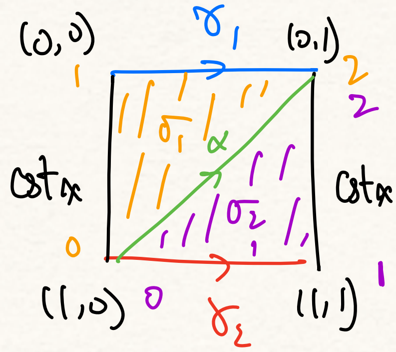
Soit $[\gamma_1] = [\gamma_2] \in \pi_1(X, x)$, alors il existe une homotopie H entre γ_1 et γ_2.

Supposons $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$

t.q. $H(0,t) = \gamma_1(t), \quad \forall t \in [0,1]$

$H(1,t) = \gamma_2(t)$,

$H(s,0) = H(s,1) = x, \quad \forall s \in [0,1]$



⊛

Soit Δ^2_1 le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ dans $[0,1]\times[0,1]$, ordonnés cycliquement.

Soit Δ^2_2 le triangle de sommets $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ dans $[0,1]\times[0,1]$, ordonnés cycliquement.

Alors, $\sigma_1 := H|_{\Delta^2_1} : \Delta^2_1 \longrightarrow X$ et $\sigma_2 := H|_{\Delta^2_2} : \Delta^2_2 \to X$

avec les indices des sommets comme sur le graphe ⊛.

définissent deux éléments dans $C_2(X;\mathbb{Z})$.

On a

$$\partial\sigma_1 = \gamma_1 - \alpha + cst_x$$

$$\partial\sigma_2 = cst_x - \alpha + \gamma_2$$

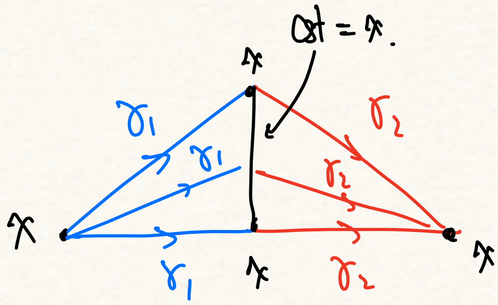
Donc, $\partial(\sigma_1 - \sigma_2) = \gamma_1 - \gamma_2$

En particulier, on obtient $\gamma_1 - \gamma_2 \in \mathrm{Im}(\partial : C_2(X;\mathbb{Z}) \to C_1(X;\mathbb{Z}))$.

Donc, $[\gamma_1] - [\gamma_2] = [\gamma_1 - \gamma_2] = 0 \in H_1(X;\mathbb{Z})$

(2) On vérifie que $[\gamma_1\gamma_2] = [\gamma_1] + [\gamma_2]$.

Soit $\sigma : \Delta^2 \longrightarrow X$ définit par

$\Delta^2 \cong$ 

Alors, $\partial\sigma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2$

Donc, $[\gamma_1]+[\gamma_2]-[\gamma_1+\gamma_2] = 0 \in H_1(X;\mathbb{Z})$ comme $\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2 \in \mathrm{Im}(\partial)$.

Puisque $H_1(X;\mathbb{Z})$ est abélien, $\forall\, \alpha, \beta \in \pi_1(X,x)$, on a

$$\phi([\alpha,\beta]) = \phi(\alpha\beta - \beta\alpha) = \phi(\alpha)\phi(\beta) - \phi(\beta)\phi(\alpha) = 0.$$

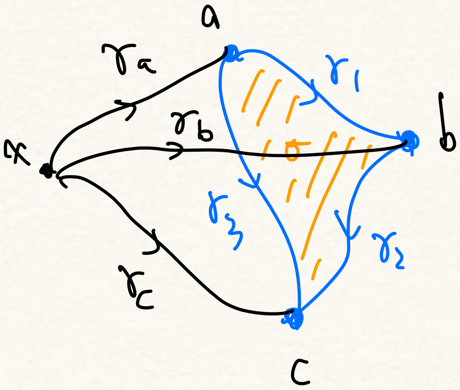
Donc ϕ se factorise par $\pi_1(X,x)\big/[\pi_1(X,x),\pi_1(X,x)] = \pi_1(X,x)^{ab}$, et induit

$\phi^{ab} : \pi_1(X,x)^{ab} \longrightarrow H_1(X;\mathbb{Z})$. Le diagram suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_1(X;\mathbb{Z}) \\
\pi_1(X,x)^{ab} \arrow[ur, "\phi^{ab}"'] &
\end{tikzcd}$$

(3). Pour montrer que ψ induit un morphisme sur $H_1(X;\mathbb{Z})$, il faut vérifier que

$\psi(\partial\sigma) = 1 \in \pi_1(X,x)^{ab}$ pour tout $\sigma \in C_2(X;\mathbb{Z})$.



Soit $\partial\sigma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$, $\gamma_1(0)=a$, $\gamma_2(0)=b$, $\gamma_3(0)=c$.

Alors, $\psi(\partial\sigma) = \psi(\gamma_1)+\psi(\gamma_2)-\psi(\gamma_3)$

$$= \gamma_a\gamma_1\gamma_b^{-1}\cdot\gamma_b\gamma_2\gamma_c^{-1}\cdot(\gamma_a\gamma_3\gamma_c^{-1})^{-1}$$

$$= \gamma_a\gamma_1(\gamma_b^{-1}\cdot\gamma_b)\gamma_2(\gamma_c^{-1}\cdot\gamma_c)\gamma_3^{-1}\gamma_a^{-1}$$

$$= \gamma_a(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3^{-1}\gamma_a^{-1}$$

Rmk: Pour $\psi: C_1(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_1(X,x)^{ab}$ être bien défini, il est important de mettre "ab" sur $\pi_1(X,x)$ pour garantir $\psi(\gamma_1+\gamma_2) = \psi(\gamma_1)+\psi(\gamma_2)$.

Puisque $\gamma_1\gamma_2$ est homotopie au γ_3, on a

$$\psi(\partial\sigma) = \gamma_a\gamma_a^{-1} = 1$$

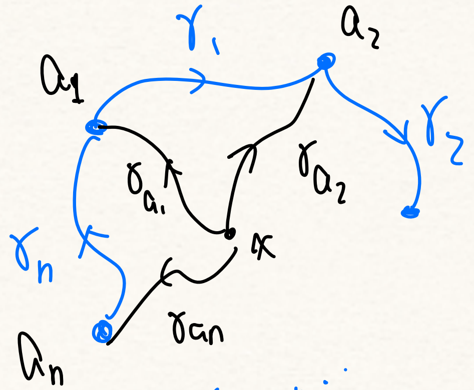
On vérifie que ψ est l'inverse de ϕ^{ab}.

$\forall [\gamma] \in \pi_1(X,x)^{ab}$, $\psi\circ\phi^{ab}(\gamma) = \gamma_x\gamma\gamma_x^{-1} = \gamma \in \pi_1(X,x)^{ab}$

$\forall \alpha \in H_1(X,\mathbb{Z})$. On suppose que α est représenté par $\sum_{i=1}^n \gamma_i \in \mathrm{Ker}(\partial)$.

Alors, $\partial(\sum_{i=1}^n \gamma_i) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(0) - \sum_{i=1}^n \gamma_i(1) = 0 \in C_0(X;\mathbb{Z})$.

Donc, on peut suppose que $\gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$ pour $1 \leq i \leq n$ avec $\gamma_{n+1} := \gamma_1$.



Soit $\gamma_i(0) = a_i$.

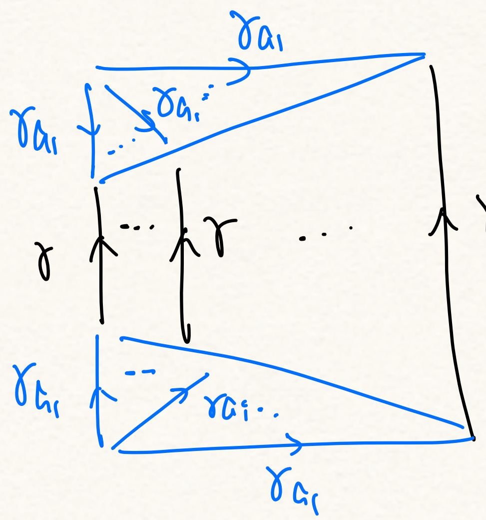
Alors, $\psi(\alpha) = \sum_{i=1}^n \psi(\gamma_i) = (\gamma_{a_1}\gamma_1\gamma_{a_2}^{-1})\cdot(\gamma_{a_2}\gamma_2\gamma_{a_3}^{-1})\cdots\cdots$

$$(\gamma_{a_n}\gamma_n\gamma_{a_1}^{-1})$$

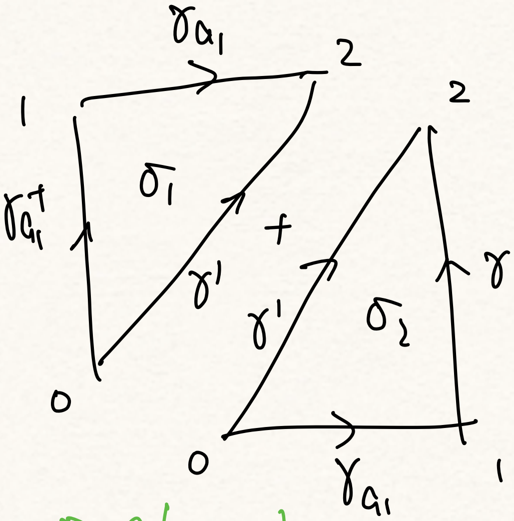
$$= \gamma_{a_1}\gamma_1\cdots\gamma_n\gamma_{a_1}^{-1} \in \pi_1(X,x)^{ab}$$

Soit $\gamma := \gamma_1 \cdots \gamma_n$. On a $\psi(\alpha) = \gamma_{a_1}\gamma\gamma_{a_1}^{-1} \in \pi_1(X,x)^{ab}$.

On montre que $[\gamma_{a_1}\gamma\gamma_{a_1}^{-1}] = [\gamma]$ dans $H_1(X;\mathbb{Z})$. $(\partial\gamma = 0 = \partial(\gamma_{a_1}\gamma\gamma_{a_1}^{-1}))$



$= \gamma_{a_1}\gamma\gamma_{a_1}^{-1}$



Cela implique que le morphisme $\pi_1(X,x) \to H_1(X;\mathbb{Z})$ ne dépend pas de choix de x. i.e.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x) \arrow[dr] \arrow[d, "\wr"] & \\ \pi_1(X,x') \arrow[r] & H_1(X;\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

induit par un arc $x' \rightsquigarrow x$

Car $\partial\sigma_1 = \gamma_{a_1}\gamma\gamma_{a_1}^{-1} + \gamma_{a_1} - \gamma'$

$\partial\sigma_2 = \gamma_{a_1} + \gamma - \gamma'$,

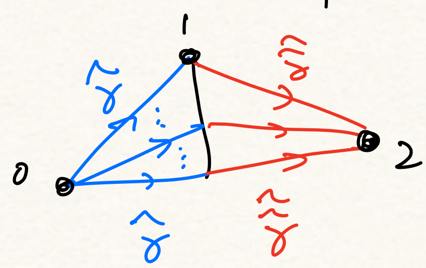
on a $\partial(\sigma_1 - \sigma_2) = \gamma_{a_1}\gamma\gamma_{a_1}^{-1} - \gamma$.

Donc, $[\gamma_{a_1}\gamma\gamma_{a_1}^{-1}] - [\gamma] = 0 \in H_1(X;\mathbb{Z})$

On obtient $\phi^{ab}\circ\psi(\alpha) = [\gamma] \in H_1(X;\mathbb{Z})$

Soit $\tilde\gamma, \tilde{\tilde\gamma} : [0,1] \to X$ t.q. $\tilde\gamma(1) = \tilde{\tilde\gamma}(0)$

On considère $\sigma =$



On a $\partial\sigma = \tilde\gamma + \tilde{\tilde\gamma} - \tilde\gamma\cdot\tilde{\tilde\gamma} \in \mathrm{Im}(\partial : C_2(X;\mathbb{Z}) \to C_1(X;\mathbb{Z}))$

Donc, on a $\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1\cdot\gamma_2 \in \mathrm{Im}(\partial)$

$\gamma_1\cdot\gamma_2 + \gamma_3 - (\gamma_1\cdot\gamma_2)\cdot\gamma_3 \in \mathrm{Im}(\partial)$

⋮

$$\gamma_1\cdots\gamma_{n-1}+\gamma_n-(\gamma_1\cdots\gamma_{n-1})\cdot\gamma_n \in \mathrm{Im}(\partial)$$

⊛ En sommant toutes les équations ci-dessus, on obtient

$$\gamma_1+\cdots+\gamma_n-(\gamma_1\cdots\gamma_n)\in \mathrm{Im}(\partial)$$

Donc, on a

$$[\gamma]=[\gamma_1\cdots\gamma_n]=[\gamma_1+\cdots+\gamma_n]\in H_1(X;\mathbb{Z}).$$

et

$$\phi^{ab}\circ\psi(\alpha)=[\gamma]=[\gamma_1+\cdots+\gamma_n]=\alpha\in H_1(X;\mathbb{Z})$$

□.

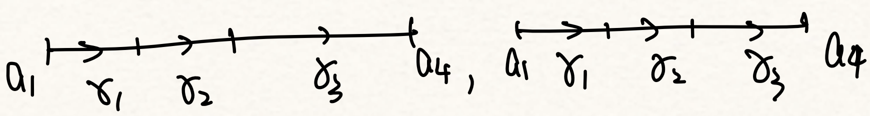
Rmk. Dans ⊛, on utilise implicitement le fait que

$$(\gamma_1\cdot\gamma_2)\cdot\gamma_3-\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\in \mathrm{Im}(\partial)$$

$$(\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3)\cdot\gamma_4-\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3\cdot\gamma_4\in \mathrm{Im}(\partial)$$

⋮

A priori, $(\gamma_1\cdot\gamma_2)\cdot\gamma_3$ et $\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3$ ne sont pas le même arc!



Mais, pour $\gamma, \gamma' : [0,1] \to X$ qui sont homotopes relativement à leurs extrémités, on a $\gamma-\gamma'\in \mathrm{Im}(\partial)$ en utilisant