

## TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE - FEUILLE 4 & 5 & 6 & 7

**Exercice 1:** Propriétés des revêtements. Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement.

- (1) Montrer que  $p$  est surjective.
- (2) Montrer que si  $B$  est séparé,  $X$  aussi.
- (3) Supposons  $B$  compact. Montrer que  $X$  est compact si et seulement si toutes les fibres de  $p$  sont finies.
- (4) On suppose que  $B$  est connexe et localement connexe. Montrer que pour toute composante connexe  $C$  de  $X$ , la restriction  $p|_C : C \rightarrow B$  est un revêtement.
- (5) Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement à fibres finies. Montrer que pour tout revêtement  $q : E \rightarrow X$ , l'application  $p \circ q$  est un revêtement.
- (6) Montrer que si  $X$  est séparé,  $p : X \rightarrow B$  est un homéomorphisme local dont toutes les fibres sont finies et de même cardinal, alors  $p$  est un revêtement.
- (7) Montrer que si  $X$  est séparé et que  $p : X \rightarrow B$  est un homéomorphisme local propre (l'image réciproque de tout compact est compacte) et fermé, alors  $p$  est un revêtement.

**Exercice 2:** Automorphismes de revêtements.

- (1) Montrer que si  $p : X \rightarrow B$  est un revêtement à deux feuillets, et  $B$  est connexe, alors il existe un unique automorphisme non trivial de  $p$ .
- (2) Construire un revêtement à trois feuillets sans automorphisme non trivial.
- (3) Soit  $X$  un espace connexe et localement connexe par arcs sur lequel agit un groupe  $G$  de façon continue, propre et libre. Montrer que le groupe d'automorphisme du revêtement  $p : X \rightarrow X/G$  s'identifie à  $G$ .

**Exercice 3:** Revêtements sur  $\mathbb{C}$ .

- (1) Montrer que  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  est un revêtement. Est-il trivial?
- (2) Montrer que pour  $n > 1$ , l'application  $z \mapsto z^n$  est un revêtement de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{C}^*$ . Est-ce un revêtement de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}$ ?
- (3) Soit  $P \in \mathbb{C}[x]$  un polynôme non constant et  $F \subset \mathbb{C}$  l'ensemble de ses valeurs critiques, i.e.  $F = \{P(z), z \in \mathbb{C} \text{ tel que } P'(z) = 0\}$ . Montrer que  $P : \mathbb{C} \setminus P^{-1}(F) \rightarrow \mathbb{C} \setminus F$  est un revêtement de degré  $\deg(P)$ .
- (4) Soit  $C_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \text{ tels que } z_i \neq z_j \text{ pour tous } i \neq j\}$  et

$$P_n = \{P \in \mathbb{C}[X], P \text{ unitaire de degré } n \text{ à racines simples}\}.$$

Construire un revêtement  $p : C_n \rightarrow P_n$ .

**Exercice 4:** Revêtements et groupes topologiques.

- (1) Soit  $G$  un groupe topologique. Montrer que  $G^0$ , la composante connexe de l'élément neutre est un sous-groupe distingué.
- (2) Calculer le quotient  $G/G^0$  pour  $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $G = O(q)$  où  $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ .
- (3) Supposons  $G$  connexe et  $H$  un sous-groupe discret distingué de  $G$ . Montrer que  $H$  est contenu dans le centre de  $G$ .
- (4) Supposons  $H$  discret dans  $G$ , montrer que l'application  $G \rightarrow G/H$  est un revêtement.
- (5) Supposons  $G$  connexe par arcs. Pour deux lacets  $\alpha, \beta : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (G, e)$ , posons  $(\alpha \star \beta)(t) = \alpha(t)\beta(t)$ . Montrer que les lacets  $\alpha \star \beta, \beta \star \alpha$  et  $\alpha\beta$  sont homotopes et en déduire que  $\pi_1(G, e)$  est commutatif.
- (6) Soit  $p : G' \rightarrow G$  un revêtement avec  $G'$  connexe par arcs et soit  $e' \in G'$  un point vérifiant  $p(e') = e$ . Montrer qu'il existe une unique structure de groupe topologique sur  $G'$  telle que  $e'$  soit l'élément neutre et telle que  $p$  soit un morphisme de groupe.
- (7) Montrer que le noyau de  $p$  est un sous-groupe discret et central de  $G'$  (contenu dans le centre). Montrer que  $p : G' \rightarrow G$  est galoisien.

- (8) Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $G$  qui commutent ( $ab = ba$ ). Donnons nous deux chemins  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $G$  vérifiant  $\alpha(0) = \beta(0) = e$ ,  $\alpha(1) = a$  et  $\beta(1) = b$ . On définit  $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)\alpha(t)^{-1}\beta(t)^{-1}$ . Montrer que la classe de  $\gamma$  dans  $\pi_1(G, e)$  ne dépend que de  $a$  et  $b$ .

**Exercice 5:** Quaternions et  $SO_3$ .

- (1) *Généralités sur les quaternions* Posons  $\mathbb{H} = \{q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}\}$  ainsi que

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin pour  $q$  comme ci-dessus, on note  $\bar{q}$  la matrice obtenue en changeant  $a$  par  $\bar{a}$  et  $b$  par  $-\bar{b}$ . Finalement on pose  $|q| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$ . Montrer que

- $\mathbb{H}$  est un sous-espace vectoriel réel de  $M_2(\mathbb{C})$  (l'espace vectoriel complexe des matrices complexes d'ordre 2) de base  $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , doublé d'une sous-algèbre réelle.
  - Pour tout  $q \in \mathbb{H}$ , on a  $q\bar{q} = |q|^2 I_2$ , où  $I_2$  est la matrice identité d'ordre 2. En déduire que  $\mathbb{H}$  est un corps non commutatif.
  - L'application  $q \mapsto |q|$  est une norme sur  $\mathbb{H}$ . La sphère unité est un sous-groupe de  $\mathbb{H}^*$  qui s'identifie à  $SU(2)$  (comme groupe) et  $S^3$  (comme variété).
  - $\mathbb{R}$  est un sous-corps de  $\mathbb{H}$  et c'est son centre.
- (2) Soit  $P \subset \mathbb{H}$  le sous-espace vectoriel réel de base  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , appelé espace des quaternions purs. Montrer que pour tout  $q \in \mathbb{H}^*$  et  $u \in P$  on a  $quq^{-1} \in P$ .
- (3) On note  $\phi_q \in \text{End}(P)$  l'application définie par  $\phi_q(u) = quq^{-1}$ . Construire deux applications

$$SU_2 \rightarrow SO_3 \text{ et } \mathbb{R}P^3 \rightarrow SO_3$$

qui sont respectivement un revêtement double et un homéomorphisme.

- (4) Soit  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}^*$  et  $\phi_{q_1, q_2} \in \text{End}(\mathbb{H})$  définie par  $\phi_{q_1, q_2}(q) = q_1 q q_2^{-1}$ . Montrer que cela définit un morphisme

$$SU_2 \times SU_2 \rightarrow SO_4$$

puis qu'il s'agit d'un revêtement double.

**Exercice 6:** Bouteille de Klein.

Soit  $K$  le quotient de  $\mathbb{R}^2$  par la relation d'équivalence engendrée par  $(x, y) \sim (x + 1, y)$  et  $(x, y) \sim (-x, y + 1)$ .

- (1) Construire un groupe  $\Gamma$  agissant sur  $\mathbb{R}^2$  tel que  $K$  soit homéomorphe à  $\mathbb{R}^2/\Gamma$ .
- (2) Montrer que  $K$  est une variété compacte et connexe.
- (3) Construire un revêtement double  $p: S^1 \times S^1 \rightarrow K$ .
- (4) Construire deux revêtements  $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow K$  et  $M \rightarrow K$  où  $M$  désigne le ruban de Möbius. Lequel est galoisien?

**Exercice 7:** Applications du théorème de Van Kampen.

On dit qu'un espace topologique  $X$  est correctement pointé en  $x \in X$  s'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x$  qui se rétracte par déformation sur  $x$ .

- (1) Montrer qu'une variété est correctement pointée en chacun de ses points.
- (2) Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont correctement pointés en  $x$  et  $y$  respectivement, on a avec les choix de point base naturels:

$$\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) \star \pi_1(Y).$$

- (3) Calculer le groupe fondamental de l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  pour tout  $n \geq 1$ .
- (4) Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n \geq 3$  et  $X \subset M$  un sous-ensemble fini. Montrer que l'inclusion  $M \setminus X \rightarrow M$  induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux.
- (5) Soit  $X$  un espace topologique et  $SX = X \times [0, 1]/\sim$  où  $(x, t) \sim (y, s)$  ssi  $t = s = 0$  ou  $t = s = 1$  ou  $t = s$  et  $x = y$  ( $SX$  est appelé suspension de  $X$ ). Montrer que  $SX$  est simplement connexe si  $X$  est connexe par arcs, puis donner un contre-exemple si  $X$  n'est pas connexe par arcs.

- (6) Montrer qu'on peut écrire  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = U \cup V$  avec  $U$  et  $V$  deux ouverts homéomorphes respectivement à un disque ouvert et un ruban de Möbius. En déduire l'isomorphisme  $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Exercice 8:** Groupe du noeud trivial.

Soit  $X = \mathbb{R}^3 \setminus C$  où  $C$  désigne le cercle unité dans le plan  $xy$ .

- (1) Montrer que  $X$  se rétracte par déformation sur la réunion d'une sphère avec un segment joignant ses deux pôles.
- (2) A l'aide d'une décomposition cellulaire, en déduire l'isomorphisme  $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$
- (3) Retrouver le résultat précédent en considérant la décomposition  $X = U \cup V$  où  $U$  et  $V$  sont définis respectivement par les inégalités  $x > -1/2$ ,  $x < 1/2$ .

**Exercice 9:** Graphes et groupes libres.

Soit  $\Gamma$  un graphe connexe. On note  $E(\Gamma)$  et  $V(\Gamma)$  l'ensemble des ses arêtes et de ses sommets respectivement, puis  $\chi(\Gamma) = \text{card } V(\Gamma) - \text{card } E(\Gamma)$  si ces quantités sont finies. On note  $R_n$  le graphe connexe avec  $n$  arêtes et un seul sommet.

- (1) Soit  $p : \Gamma' \rightarrow \Gamma$  un revêtement. Montrer que  $\Gamma'$  est aussi un graphe, et que si le degré de  $p$  est fini, on a  $\chi(\Gamma') = \text{deg}(p)\chi(\Gamma)$ .
- (2) On dit que  $\Gamma$  est un arbre s'il est simplement connexe. Montrer qu'on a alors  $\chi(\Gamma) = 1$ .
- (3) Montrer que tout graphe connexe  $\Gamma$  possède un arbre couvrant, i.e. un arbre  $T \subset \Gamma$  passant par tous les sommets.
- (4) Montrer que si  $\Gamma$  est fini, le quotient  $\Gamma/T$  est homotopiquement équivalent à  $R_n$ , puis  $\pi_1(\Gamma) = F_n$  avec  $1 - n = \chi(\Gamma)$ .
- (5) Déduire de tout ce qui précède que tout sous-groupe d'indice fini  $d$  d'un groupe libre de rang  $n$  est un groupe libre de rang  $m$  et relier  $d$ ,  $n$  et  $m$ .