Exercise 1.

(2) $\forall x_1 \neq x_2 \in X$. On définit $b_i = p(x_i) \in B$.

- Si $b_1 \neq b_2$. Comme B est séparé, il existe des voisinages ouverts $\mathcal{U}_i$ de b_i t.q. $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \phi$. On définit $V_i := p^{-1}(\mathcal{U}_i)$. Alors V_i est un voisinage ouvert de x_i. De plus, $V_1 \cap V_2 = \phi$.

- Si $b_1 = b_2 = b$. On choisit un voisinage $\mathcal{U}$ de b t.q.

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i, \quad \text{et} \quad p|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}.$$

Supposons que $x_1 \in \mathcal{U}_i$, $x_2 \in \mathcal{U}_j$.

Si $i = j$, alors $p|_{\mathcal{U}_i}(x_1) = b = p|_{\mathcal{U}_i}(x_2)$, et donc

$x_1 = x_2$ comme $p|_{\mathcal{U}_i}$ est un homéomorphisme.

Donc on a $i \neq j$, $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \phi$, $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{U}_j$ sont des voisinages de x_1 et x_2.

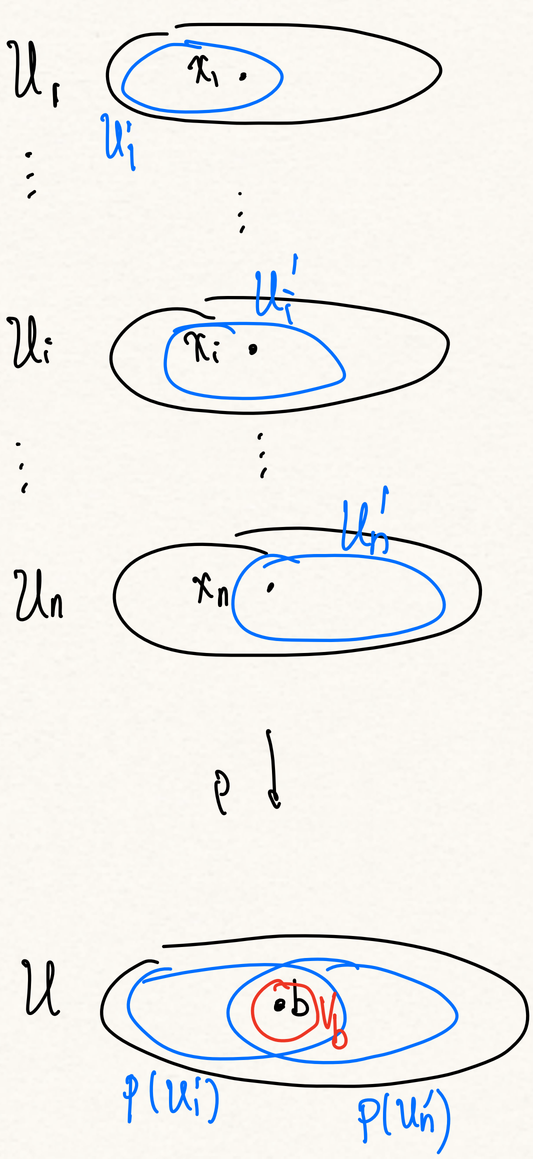
(3) • Supposons X est compact. $\forall b \in B$. Comme B est compact, et en particulier séparé, $\{b\}$ est fermé dans B. Donc $p^{-1}(b)$ est fermé dans X, et donc compact. Par ailleurs, il est discret. Par conséquence, il est fini.

- On peut supposer que B est connexe, donc tous les fibres ont le même nombre de points, disons n. Soit $S = \{\mathcal{U}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ un recouvrement ouvert de X. Alors, $\forall b \in B$, il exist un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de b t.q.

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \coprod_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i, \quad \text{et} \quad p|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}.$$

Soit $x_i = (p|_{\mathcal{U}_i})^{-1}(b) \in \mathcal{U}_i$. Alors, $\exists\, \mathcal{U}_{x_i} \in S$ t.q. $x_i \in \mathcal{U}_{x_i}$.

Soit $\mathcal{U}_i' := \mathcal{U}_{x_i} \cap \mathcal{U}_i$. Il est ouvert dans $\mathcal{U}_i$.



Donc $p(\mathcal{U}_i') = (p|_{\mathcal{U}_i})(\mathcal{U}_i') \subseteq \mathcal{U}$ est ouvert.

On définit $V_b := \bigcap_{i=1}^n p(\mathcal{U}_i')$, il est un voisinage ouvert de b.
$\subseteq \mathcal{U}$

Il satisfait

$$p^{-1}(V_b) = \coprod_{i=1}^n (p|_{\mathcal{U}_i})^{-1}(V_b) \subseteq \coprod_{i=1}^n \mathcal{U}_i' \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{x_i} \quad (*)$$

Alors, la collection $\{V_b \mid b \in B\}$ est un recouvrement ouvert de B.

Comme B est compact, $B = \bigcup_{j=1}^m V_{b_j}$.

Donc, $X = p^{-1}(B) = \bigcup_{j=1}^m p^{-1}(V_{b_j})$

$(*)$

$$\subseteq \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{x \in p^{-1}(b_j)} \mathcal{U}_x$$

où $\mathcal{U}_x \in S$, $\forall x \in p^{-1}(b_j)$, $\forall j$.

On a trouvé donc un sous recouvrement fini de $\{\mathcal{U}_\lambda\}$.

(4) $\forall b \in B$, on peut choisir un voisinage ouvert et connexe (comme B est localement connexe) t.q.

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i, \quad \text{et} \quad p|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}.$$

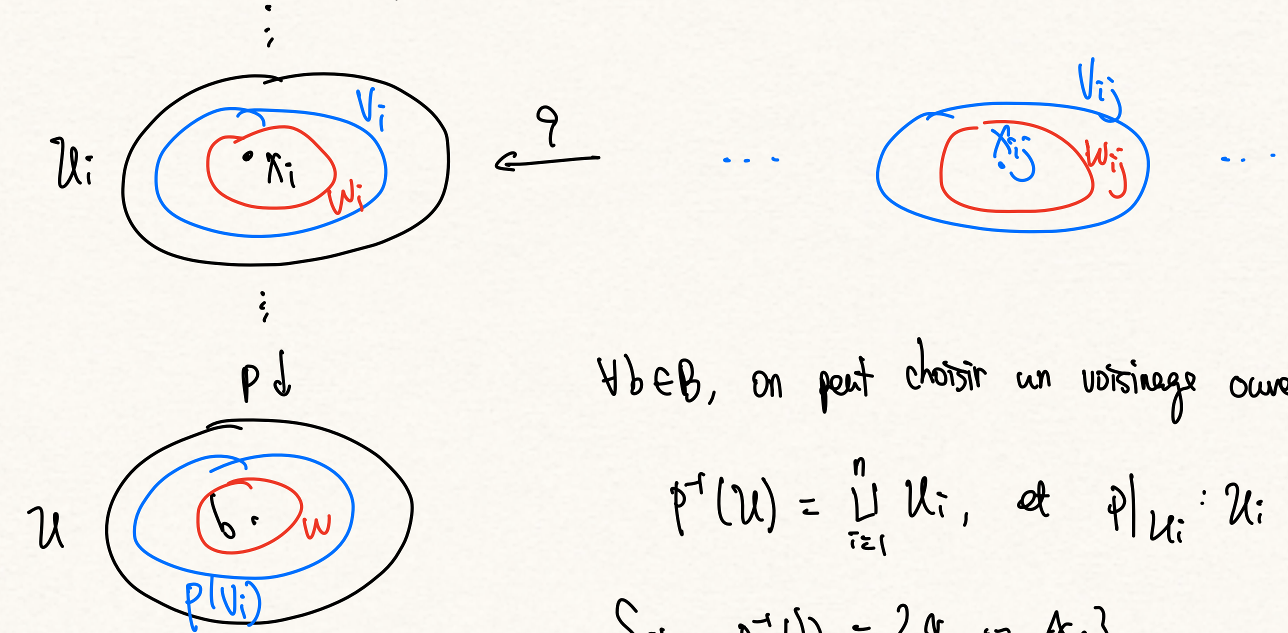
Comme $C \subseteq X$ est une composante connexe et $\mathcal{U}_i$ est connexe, soit $\mathcal{U}_i \subseteq C$

Soit $\mathcal{U}_i \cap C = \emptyset$. Donc, on a

$$(p|_C)^{-1}(\mathcal{U}) = C \cap p^{-1}(\mathcal{U}_i) = \coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i \cap C = \coprod_{\mathcal{U}_i \cap C \neq \emptyset} \mathcal{U}_i$$

Donc $p|_C$ est un revêtement.

15) On peut supposons que B est connexes, et $\# p^{-1}(b) = n$, $\forall b \in B$.



$\forall b \in B$, on peut choisir un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de b t.q.

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \coprod_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i, \quad \text{et} \quad p|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}.$$

Soit $p^{-1}(b) = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

Alors $\forall 1 \leq i \leq n$, on considère $x_i \in X$.

On peut choisir un voisinage ouvert V_i de x_i

t.q. $V_i \subseteq \mathcal{U}_i$, et

$$q^{-1}(V_i) = \coprod_{j \in J_i} V_{ij}, \quad \text{et} \quad q|_{V_{ij}} : V_{ij} \xrightarrow{\simeq} V_i.$$

On définit $W = \bigcap_{i=1}^{n} p(V_i)$, alors W est un voisinage ouvert de b.

On définit $W_i = (p|_{\mathcal{U}_i})^{-1}(W)$, il est un ouvert dans V_i, et $p|_{\mathcal{U}_i} : W_i \xrightarrow{\simeq} W$

$W_{ij} = (q|_{V_{ij}})^{-1}(W_i)$, il est un ouvert dans V_{ij}, et

$$q|_{V_{ij}} : W_{ij} \xrightarrow{\simeq} W_i.$$

Donc, on a $$(q \circ p)^{-1}(W) = q^{-1}\Big(\coprod_{i=1}^{n} W_i\Big) = \coprod_{i=1}^{n} \coprod_{j \in J_i} W_{ij},$$

et $$(q \circ p)|_{W_{ij}} : W_{ij} \xrightarrow{\simeq} W_i \xrightarrow{\simeq} W.$$

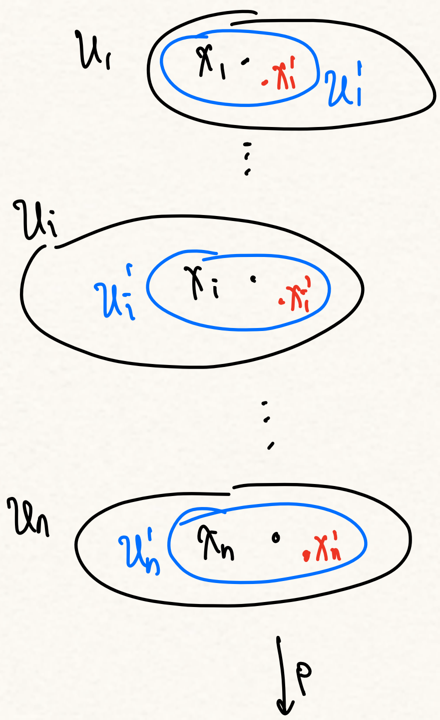
Donc, $q \circ p$ est un revêtement.

(6) Supposons $\#p^{-1}(b) = n$, $\forall b \in B$.

$\forall b \in B$, supposons que $p^{-1}(b) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Alors, p est un homéomorphisme local implique que pour $\forall i$, $\exists\, \mathcal{U}_i$ un voisinage ouvert de x_i, t.q. $p(\mathcal{U}_i)$ est un voisinage ouvert de b et

$$p|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\simeq} p(\mathcal{U}_i)$$



Puisque X est séparé, on peut supposer que les ouverts $\mathcal{U}_i$ sont 2 à 2 disjoints.

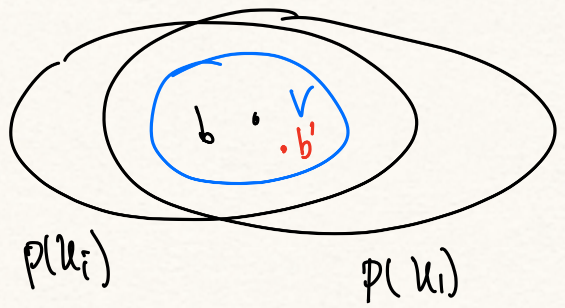
On définit

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} p(\mathcal{U}_i).$$

et $$\mathcal{U}_i' = (p|_{\mathcal{U}_i})^{-1}(V).$$

Alors V est un voisinage ouvert de b, et

$$p|_{\mathcal{U}_i'} : \mathcal{U}_i' \xrightarrow{\simeq} V.$$



Donc, il suffit de montrer que

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i'.$$

Il est évident que $\bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i' \subseteq p^{-1}(V)$.

Réciproquement, $\forall b' \in V$, on définit $x_i' = (p|_{\mathcal{U}_i'})^{-1}(b')$.

Alors $x_i' \in \mathcal{U}_i'$, et $p^{-1}(b') \supseteq \{x_1', \dots, x_n'\}$.

Puisque $\#p^{-1}(b') = n$, et x_i' sont 2 à 2 distincts, on obtient

$$p^{-1}(b') = \{x_1', \dots, x_n'\} \subseteq \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i'$$

Donc, on a $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i'$, et p est un revêtement.

(7) $\forall b \in B$, $\{b\}$ est cpt, donc $p^{-1}(b)$ est cpt.

Pour $\forall x \in p^{-1}(b)$, puisque p est un homéomorphisme local, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_x$ de x t.q. $p(\mathcal{U}_x)$ est un voisinage ouvert de b, et

$$p|_{\mathcal{U}_x} : \mathcal{U}_x \xrightarrow{\simeq} p(\mathcal{U}_x).$$

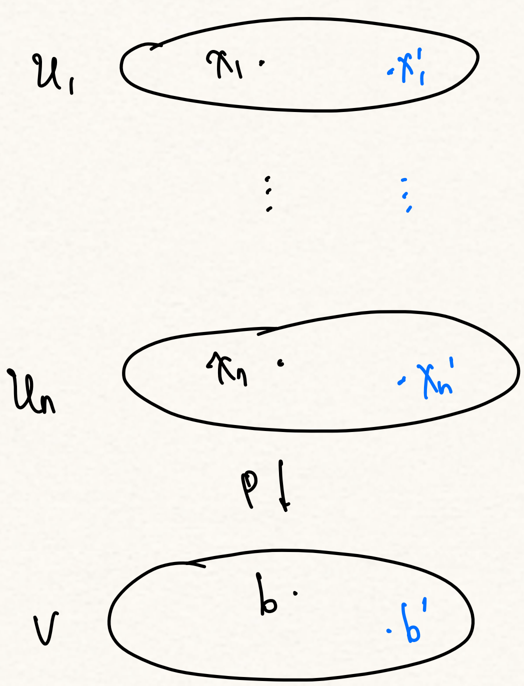
Donc, on a $\{x\} = \mathcal{U}_x \cap p^{-1}(b)$. Donc, $p^{-1}(b)$ est discrète.

Par ailleurs, $p^{-1}(b)$ est compact puisque p est propre, il est donc fini.

Supposons que

$$p^{-1}(b) = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

:}?



Par le même argument que dans (6), on peut choisir des voisinages ouvert $\mathcal{U}_i$ de x_i, et un voisinage V de b t.q.

$$p|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\simeq} V.$$

($\mathcal{U}_i$ sont $\mathcal{U}_i'$ dans (6)).

L'étape suivante consiste à montrer que

$$p^{-1}(V) = \coprod_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \qquad \circledast$$

quitte à rétrécir V.

L'idée est d'enlever des pts de V qui ne satisfont pas $\circledast$. On procède comme suit.

On définit $W := X \setminus \coprod_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$, il est fermé dans X.

Puisque p est fermé, $p(W)$ est fermé dans B.

Donc $V' = V \setminus B$ est un ouvert dans B.

Il faut de montrer que :

- $b \in V'$

- $p^{-1}(V) \subseteq \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$ qui implique que

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i=1}^{n} (p|_{\mathcal{U}_i})^{-1}(V).$$

La preuve est laissé au lecteur.

D.

Exercise 2.

(1) $\forall x \in X$, il y a deux pts dans $p^{-1}(p(x))$, un est x, autre on note par $g(x)$.

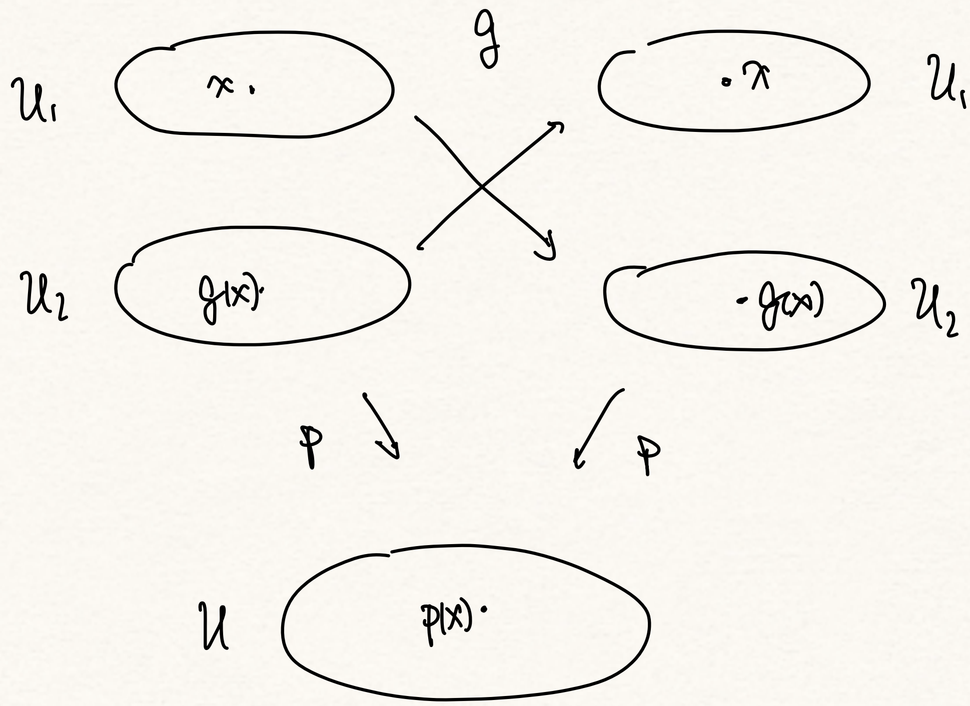
Alors, g est une application $X \to X$. On vérifie que g est continue.

Puisque g est une bijection, il suffit de montre que g est ouvert.

En fait, $\forall x \in X$, il exist un voisinage ouvert connexe $\mathcal{U}$ de $p(x)$ t.q.

$$p^{-1}(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}_1 \sqcup \mathcal{U}_2, \quad p|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}.$$

On peut supposer que $x \in \mathcal{U}_1$, alors on a $g(x) \in \mathcal{U}_2$



Alors, on peut vérifie que $g|_{\mathcal{U}_1} = (p|_{\mathcal{U}_2})^{-1} \circ p|_{\mathcal{U}_1} : \mathcal{U}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}_2$

et que $g|_{\mathcal{U}_2} = (p|_{\mathcal{U}_1})^{-1} \circ p|_{\mathcal{U}_2} : \mathcal{U}_2 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}_1$

Donc, $g|_{\mathcal{U}}$ est ouvert, g est un automorphisme non trivial de p.

Soit f un automorphisme non trivial de p.

Alors, il existe $x_0 \in X$ t.q. $f(x_0) \neq x_0$, et donc $f(x_0) = g(x_0)$.

Puisque f et g sont deux relèvement de $p: X \to B$ de long de p,

on obtient $f = g$ par l'unicité de relèvement.

(3) Puisque l'action est continue et propre, l'application quotient $p: X \to X/G$ est un revêtement. On définit une application

$$\phi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(p : X \to X/G)$$

par $\phi(g) : X \longrightarrow X$. On vérifie que ϕ est une bijection.

$$x \longmapsto gx$$

Si $\phi(g) = \phi(g')$. alors on a $gx = g'x$, $\forall x \in X$

i.e. $g^{-1}g'x = x$, $\forall x \in X$.

L'action est libre, donc on a $g^{-1}g' = 1$, i.e., $g = g'$. Donc ϕ est injectif.

Soit $f : X \to X$ un automorphisme de p.

Soit $x_0 \in X$ un pt quelconque. Puisque $p(f(x)) = p(x)$, il existe $g_0 \in G$ t.q. $f(x_0) = g_0 x_0$. Donc, on a $f(x_0) = \phi(g_0)(x_0)$. Par l'unicité de relèvement, on a $f = \phi(g_0)$. Donc, ϕ est surjectif.

D.

Exercise 2.(2).

<u>Lemme</u>. Soit $p : X \to B$ un revêtement avec X connexe. Alors, $\forall b \in B$, soit

$$\rho : \pi_1(B,b) \longrightarrow \mathrm{Aut}(p^{-1}(b))$$

l'application monodromie. Alors, il y a un isomorphisme de gp :

$$\mathrm{Aut}(p) \cong \left\{ \begin{array}{c} T \in \mathrm{Aut}(p^{-1}(b)) \text{ qui commute avec} \\ \rho_*(\pi_1(B,b)) \end{array} \right\}.$$

Pf. On définit

$$\varphi : \mathrm{Aut}(p) \longrightarrow \{ \cdots \}$$

par $\varphi(\phi) := \phi|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \to p^{-1}(b)$.

(1) On vérifie que $\varphi(\phi)$ commute avec $\rho_*(\pi_1(B,b))$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"] & X \arrow[dl, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & B & \end{tikzcd}$$

$\forall [\gamma] \in \pi_1(B,b)$, $\forall x \in p^{-1}(b)$.

Alors, il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$

t.q. $\begin{cases} \tilde{\gamma}(0) = x \\ \tilde{\gamma}(1) = \rho([\gamma])(x). \end{cases}$

L'application $\tilde{\gamma}' := \phi \circ \tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ satisfait

$$\tilde{\gamma}'(0) = \phi \circ \tilde{\gamma}(0) = \phi(x).$$

Puisque $\tilde{\gamma}'$ est l'unique relèvement de γ qui commence avec $\phi(x)$, on a

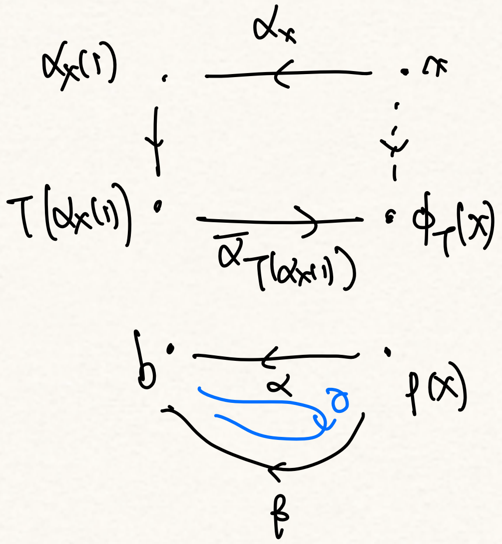
$$\tilde{\gamma}'(1) = \rho([\gamma])(\phi(x))$$

i.e. $\phi \circ \tilde{\gamma}(1) = \rho([\gamma])(\phi(x))$

$$\begin{array}{c} \phi \circ \tilde{\gamma}(1) \\ \parallel \\ \phi \circ \rho([\gamma])(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow \phi \circ \rho([\gamma]) = \rho([\gamma]) \circ \phi$$

① Pour tout $T \in \mathrm{Aut}(p^{-1}(b))$ qui commute avec $p_*(\pi_1(B,b))$, on montre qu'il peut être prolongé de manière unique en un $\phi_T \in \mathrm{Aut}(p)$.



$\forall x \in X$, on choisir $\alpha : p(x) \rightsquigarrow b$ dans B

Il existe un unique relèvement α_x de α t.q. $\alpha_x(0) = x$.

Alors, $\alpha_x(1) \in p^{-1}(b)$.

$\Rightarrow T(\alpha_x(1)) \in p^{-1}(b)$

Il existe un unique relèvement $\bar\alpha_{T(\alpha_x(1))}$ de $\bar\alpha$ t.q. $\bar\alpha_{T(\alpha_x(1))}(0) = T(\alpha_x(1))$

On définit

$$\phi_T(x) = \bar\alpha_{T(\alpha_x(1))}(1).$$

Pour $\forall \gamma : [0,1] \to B$, et $\forall x \in p^{-1}(\gamma(0))$, on note $\gamma_x : [0,1] \to X$ le relèvement unique de γ dans X qui part de x.

On vérifie que $\phi_T(x)$ ne dépend pas de choix du α.

Soit $\beta : p(x) \rightsquigarrow b$ un autre chemin.

Soit $\gamma = \bar\alpha\beta$. Alors, $\beta \sim \gamma\alpha$.

$\Rightarrow \beta_x(1) = \gamma_{\alpha_x(1)}(1) = p(\gamma)(\alpha_x(1))$

$\Rightarrow T(\beta_x(1)) = T \circ p(\gamma)(\alpha_x(1)) = p(\gamma) \circ T(\alpha_x(1)) = \gamma_{T(\alpha_x(1))}(1)$

$\Rightarrow \bar\beta_{T(\beta_x(1))}(1) = \bar\beta_{\gamma_{T(\alpha_x(1))}(1)}(1) = (\gamma\beta)_{T(\alpha_x(1))}(1) = \bar\alpha_{T(\alpha_x(1))}(1)$ D.

On revient à l'exercice 2.

Supposons on commence par l'espace bas (B,b)

Alors, un revêtement à 3 feuillets de (B,b) correspondre à un ss-gp

H de $\pi_1(B,b)$ d'ordre 3. donc correspondre à un surjection

$$p : \pi_1(B,b) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(\{1,2,3\}) = S_3$$

via $H = \ker(p)$.

Pour le gp de automorphisme être trivial, il faut $p_*(\pi_1(B,b)) = S_3$.

Puisque $S_3 = \mathrm{Aut}(\{1,2,3\})$ est engendré comme un gp par (12) et (123)

où $(12) : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 3$

et $(123) : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 1$,

il est suffit d'exiger que $\{(12), (123)\} \subseteq p_*(\pi_1(B,b))$

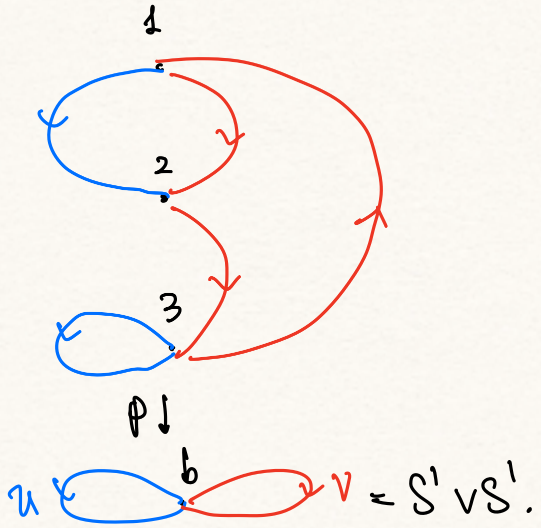
On prend $B = S^1 \vee S^1$.

Alors $\pi_1(B,b) \cong \langle u, v \rangle$ est le gp libre engendré par u et v.

On définit p par

$$\begin{aligned} p : \langle u, v \rangle &\longrightarrow S_3 \\ u &\longmapsto (12) \\ v &\longmapsto (123) \end{aligned}$$

Un modèle concret :



D.

Exercice 4.

(1) On montre d'abord que G° est un sous groupe. Il suffit de montrer que $\forall g_1, g_2 \in G^\circ$ on a $g_1 g_2^{-1} \in G^\circ$. On considère l'application continue

$$m : G \times G \longrightarrow G$$
$$(x, y) \longmapsto xy^{-1}.$$

Alors, $m(e,e) = e \in G^\circ$. Puisque G° est connexe et m est continue, $m(G^\circ, G^\circ)$ est connexe. Par ailleurs, il contient e°. Donc, on a

$$m(G^\circ, G^\circ) \subseteq G^\circ.$$

En particulier, on obtient $g_1 g_2^{-1} = m(g_1, g_2) \in G^\circ$.

On montre que G° est distingué dans la suite.

$\forall g \in G$, $\mathrm{Ad}(g) : G \longrightarrow G$ est un homéomorphisme.
$x \longmapsto gxg^{-1}$

Par ailleurs, $\mathrm{Ad}(g)(e) = e$. Donc, $\mathrm{Ad}(g)(G^\circ) = G^\circ$ i.e. $gG^\circ g^{-1} = G^\circ$.

Trop compliqué. Une preuve beaucoup plus concise se trouve à la fin, proposé par Sari Taoufiq.

$\boxed{(3)}$ Puisque H est discret, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de e dans G, t.q. $\mathcal{U} \cap H = \{e\}$. On définit $V = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{-1}$. Alors, V est aussi un voisinage de e dans G, $V \cap H = \{e\}$, $V = V^{-1}$.

Pour $\forall h \in H$, soit $V_h := h \cdot V$, il est un voisinage ouvert de h dans G.

Par ailleurs, on a $V_h \cap H = h \cdot V \cap h \cdot H = h \cdot (V \cap H) = \{h\}$.

Fix $h, h' \in H$, on définit

$$A_{h,h'} = \{ g \in G \mid ghg^{-1} = h' \}$$

Alors, on montre que $A_{h,h'}$ est ouvert pour $\forall h, h' \in H$.

Soit $\alpha_h : G \longrightarrow G$ défini par $\alpha_h(g) := g h g^{-1}$.

$\forall g_0 \in A_{h,h'}$, $\alpha_h(g_0) = g_0 h g_0^{-1} = h' \Rightarrow g_0 \in \underbrace{\alpha_h^{-1}(V_{h'})}_{\text{ouvert de } g_0} \stackrel{\Delta}{=} W$. un voisinage ouvert de g_0.

On va vérifier que $W \subseteq A_{h,h'}$

$\forall g \in W$, on a $\alpha_h(g) \in V_{h'}$.

Par ailleurs, on a $\alpha_h(g) = g h g^{-1} \in g H g^{-1} = H$ car H est distingué

On a donc $\alpha_h(g) \in V_{h'} \cap H = \{h'\} \Rightarrow \alpha_h(g) = h' \Rightarrow g \in A_{h,h'}$

Donc, $W \subseteq A_{h,h'}$, et $A_{h,h'}$ est ouvert.

Puisque H est distingué, pour $\forall h \in H$, on a

$$G = \coprod_{h' \in H} A_{h,h'}$$

où $A_{h,h'}$ sont ouverts.

Mais $e \in A_{h,h} \Rightarrow A_{h,h} \neq \phi$, ouvert et fermé dans G.

G est connexe $\Rightarrow G = A_{h,h}$ i.e. $h \in Z(G) =$ center of G.

(4) $p : G \longrightarrow G/H$. Puisque H est discret dans G, il existe un voisinage ouvert V de e t.q. $V \cap H = \{e\}$. Puisque

$$\alpha : G \times G \longrightarrow G$$
$$(x, y) \longmapsto x^{-1} y$$

est continue, et $\alpha(e,e) = e$. il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de e t.q. $\alpha(\mathcal{U}, \mathcal{U}) \subseteq V$ i.e. $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U} \cap H = \{e\}$.

En remplaçant $\mathcal{U}$ par $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}^{-1}$, on peut de plus supposer que $\mathcal{U}=\mathcal{U}^{-1}$.

Pour $\forall g\in G$, on définit $\mathcal{U}_g := g\cdot\mathcal{U}$, il est un voisin. ouvert de g.

Alors, fix $g_0\in G$, on a $p^{-1}(p(g_0)) = g_0\cdot H$.

① $\forall g\in g_0\cdot H$, on vérifie que $p|_{\mathcal{U}_g} : \mathcal{U}_g \to G/H$ est injectif.

Si $x,y\in \mathcal{U}_g$ t.q. $p(x)=p(y)$.

Alors il existe $x',y'\in\mathcal{U}$ t.q. $x=gx'$, $y=gy'$.

$$p(x)=p(y) \Rightarrow x^{-1}y = x'^{-1}y' \in H$$

Par ailleurs, $x'^{-1}y' \in \mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}$

On a donc, $x'^{-1}y'\in\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}\cap H = \{e\} \Rightarrow x'=y' \Rightarrow x=y$.

② $\forall g_1\neq g_2\in g_0\cdot H$, $\mathcal{U}_{g_1}\cap\mathcal{U}_{g_2}=\phi$.

En fait, si non, il existe $x\in\mathcal{U}_{g_1}\cap\mathcal{U}_{g_2}$

$\Rightarrow g_1^{-1}x\in\mathcal{U},\ g_2^{-1}x\in\mathcal{U}$

$\Rightarrow g_2^{-1}g_1 = (g_2^{-1}x)\cdot(g_1^{-1}x)^{-1} \in \mathcal{U}\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}$

Par ailleurs, $g_1,g_2\in g_0\cdot H \Rightarrow g_2^{-1}g_1\in H$

On obitent donc $g_2^{-1}g_1 \in \mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}\cap H = \{e\} \Rightarrow g_1=g_2$. Contradiction

③ $\forall g\in g_0\cdot H$, on a $p^{-1}(p(\mathcal{U}_g)) = \bigsqcup_{g'\in g_0\cdot H}\mathcal{U}_{g'}$

En fait, $\forall x\in p^{-1}(p(\mathcal{U}_g)) \Rightarrow p(x)\in p(\mathcal{U}_g)$

$$\Rightarrow x\in\mathcal{U}_g\cdot H = g\cdot\mathcal{U}\cdot H \in g_0\cdot H\mathcal{U}\cdot H \underset{\text{par (3)}}{=} g_0\cdot H\cdot\mathcal{U} = \bigsqcup_{g'\in g_0\cdot H}\mathcal{U}_{g'}$$

En réciproque, $p\left(\bigsqcup_{g'\in g_0\cdot H} \mathcal{U}_{g'}\right) = \bigcup_{g'\in g_0\cdot H} p(g'\cdot \mathcal{U}) = p(g_0\cdot H\cdot \mathcal{U}) = p(g_0\cdot \mathcal{U}) = p(\mathcal{U}_{g_0})$

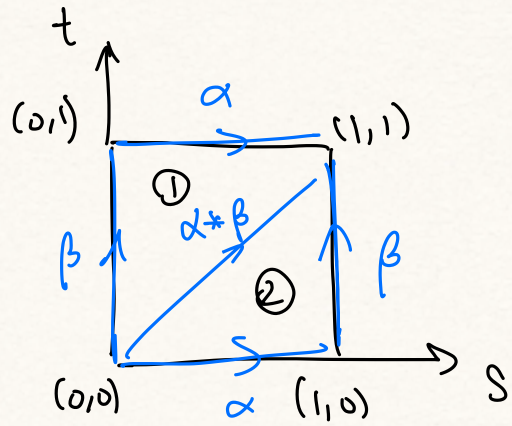
En conclure, $p(\mathcal{U}_{g_0})$ et un voisinage ouvert de $p(g_0)$ dans G/H, et

$$p^{-1}(p(\mathcal{U}_{g_0})) = \bigsqcup_{g\in g_0\cdot H} \mathcal{U}_g, \quad p|_{\mathcal{U}_g} : \mathcal{U}_g \to p(\mathcal{U}_{g_0}) \text{ sont homéos.}$$

Donc, $p : G \to G/H$ est un revêtement.

(5). On considère l'application $F : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow G$

$$(s,t) \longmapsto \alpha(s)\beta(t)$$



Puisque ① est contractible

$\Rightarrow \alpha*\beta \sim \beta\alpha.$

De même, ② est contractible

$\Rightarrow \alpha*\beta \sim \alpha\beta.$

Donc, on a $\alpha*\beta \sim \alpha\beta \sim \beta*\alpha \sim \beta\alpha.$

(6)
$$\begin{tikzcd}
G'\times G' \arrow[r, dashed, "m'"] \arrow[d, "p\times p"'] \arrow[dr, "f"] & G' \arrow[d, "p"] \\
G\times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}$$

Soit $f := m\circ(p\times p) : G'\times G' \longrightarrow G$.

Si m' existe, il est l'unique relèvement de f le long de p qui envoye (e',e') sur e'.

Donc pour montrer $\exists!\, m'$, il faut de vérifier que

$$f_*\left(\pi_1(G'\times G', (e',e'))\right) \subseteq p_*\left(\pi_1(G', e')\right)$$

En fait, on a

$$\pi_1(G'\times G', (e',e')) = \pi_1(G',e')\times \pi_1(G',e')$$

$$f_*(\pi_1(G'\times G'), (e',e')) = p_*(\pi_1(G',e'))* p_*(\pi_1(G',e'))$$

par (5)

$$= p_*(\pi_1(G',e'))\, p_*(\pi_1(G',e'))$$

$$\subseteq p_*(\pi_1(G',e'))$$

(7). $p^{-1}(e)$ discret (car p est un revêtement) + distingué + sous gp.

Il est donc contenu dans $Z(G)$ par (3).

$\forall g'\in p^{-1}(e)$, on définit $\phi_{g'}: G' \to G'$
$$x \mapsto g'x.$$

Alors, on a $p\circ\phi_{g'}(x) = p(g'x) = p(g')p(x) = e\,p(x) = p(x)$

$\Rightarrow p\circ\phi_{g'} = p \Rightarrow \phi_{g'} \in \mathrm{Aut}(p)$.

Pour $\forall g_1', g_2' \in G'$ t.q. $p(g_1') = p(g_2')$

$\Rightarrow p(g_2' g_1'^{-1}) = e \Rightarrow g' := g_2' g_1'^{-1} \in p^{-1}(e)$

$\Rightarrow \phi_{g'} \in \mathrm{Aut}(p)$ qui satisfait
$$\phi_{g'}(g_1') = g'g_1' = g_2'.$$

Donc, $\mathrm{Aut}(p)$ agit sur chaque fibre transitivement.

(8). Soit $p: \tilde{G} \to G$ le revêtement universel

Par (6), on peut supposer que p est un morphisme de gp.

Soient $\alpha, \alpha' : e \rightsquigarrow a$,

$\beta, \beta' : e \rightsquigarrow b$.

Soient $\tilde{\alpha} : \tilde{e} \rightsquigarrow \tilde{a}$, $\tilde{\alpha}' : \tilde{e} \rightsquigarrow \tilde{a}'$

$\tilde{\beta} : \tilde{e} \rightsquigarrow \tilde{b}$, $\tilde{\beta}' : \tilde{e} \rightsquigarrow \tilde{b}'$

les relèvements de $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$.

Alors, $\tilde{\gamma}(t) := \tilde{\alpha}(t)\tilde{\beta}(t)\tilde{\alpha}(t)^{-1}\tilde{\beta}(t)^{-1}$ est le relèvement

de $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)\alpha(t)^{-1}\beta(t)^{-1}$!

De même, $\tilde{\gamma}'(t) := \tilde{\alpha}'(t)\tilde{\beta}'(t)\tilde{\alpha}'(t)^{-1}\tilde{\beta}'(t)^{-1}$ est le relèvement

de $\gamma'(t) = \alpha'(t)\beta'(t)\alpha'(t)^{-1}\beta'(t)^{-1}$

Puisque $p^{-1}(e) \cong \pi_1(G, e)$, pour montrer que $[\gamma] = [\gamma'] \in \pi_1(G, e)$,

il suffit de montre que $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1) \in \tilde{G}$.

Puisque $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}'$ sont des relèvements de α, α', on obtient

$$\tilde{a} = \tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(\alpha(1)) = p^{-1}(a)$$

$$\tilde{a}' = \tilde{\alpha}'(1) \in p^{-1}(\alpha(1)) = p^{-1}(a)$$

Donc, $\exists x \in \ker(p)$ s.t. $\tilde{a}' = x\tilde{a}$.

De même, $\exists y \in \ker(p)$ s.t. $\tilde{b}' = y\tilde{b}$.

On a $\tilde{\gamma}'(1) = \tilde{a}'\tilde{b}'\tilde{a}'^{-1}\tilde{b}'^{-1} = x\tilde{a}y\tilde{b}\tilde{a}^{-1}x^{-1}\tilde{b}^{-1}y^{-1}$

Par (7), $\ker(p) \in Z(\tilde{G}) \Rightarrow \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}\tilde{b}^{-1} = \tilde{\gamma}(1)$. $\square$

Exercice 4.(3) (Merci à Sari Taoufiq de m'avoir indiqué cette methode.)

On fix $h \in H$, et on défini une application $\phi_h : G \to H$ par

$$\phi_h(g) = ghg^{-1}.$$

Puisque H est distingué, on a $ghg^{-1} \in H$, et ϕ_h est donc bien défini.

Comme G est connexe, ϕ_h est continue, $\phi_h(G)$ est connexe.

Mais $\phi_h(G)$ est contenu dans H qui est discret.

Donc ϕ_h est donc constant, et on obtient

$$\phi_h(g) = \phi_h(e) = h, \quad \forall g \in G.$$

C'est-à-dire, on a $gh = hg$, $\forall g \in G$.

Exercise 5.

(1) • Supposons $a = a_1 + ia_2$, $b = -b_1 + ib_2$ avec $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

Alors, on a

$$q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \mathbb{1} + a_2 \cdot i + b_1 \cdot j + b_2 \cdot k$$

Pour montre $\mathbb{H}$ est une sous-algèbre réelle, on vérifie que

$$\mathbb{1}^2 = \mathbb{1}, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

• Par définition, on a $\bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Donc, $q\bar{q} = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2+|b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2+|b|^2 \end{pmatrix} = |q|^2 \cdot I_2$

$\Rightarrow$ $|q|^{-2} \cdot \bar{q}$ est l'inverse de q dans $(\mathbb{H}, \times)$

$\mathbb{H}$ est non-commutatif parce qu'on a $ij = k = -ji$, donc $ij \neq ji$.

• On vérifie d'abord que $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{H}$.

(a) $|q| = 0 \Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow q = 0$

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda q = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda \bar{b} \\ \lambda b & \lambda \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & -\overline{\lambda b} \\ \lambda b & \overline{\lambda a} \end{pmatrix}$

Donc, $|\lambda q| = \sqrt{|\lambda a|^2 + |\lambda b|^2} = |\lambda| \cdot \sqrt{|a|^2+|b|^2} = |\lambda| \cdot |q|$

(c) Supposons que $q' = \begin{pmatrix} a' & -\bar{b}' \\ b' & \bar{a}' \end{pmatrix}$

On a $q + q' = \begin{pmatrix} a+a' & -\overline{b+b'} \\ b+b' & \overline{a+a'} \end{pmatrix}$

Donc, $|q+q'|^2 = |a+a'|^2 + |b+b'|^2$
$$\leq (|a|+|a'|)^2 + (|b|+|b'|)^2$$
$$= |a|^2+|a'|^2+|b|^2+|b'|^2+2(|a||a'|+|b||b'|)$$

$$(|q|+|q'|)^2 = |q|^2+|q'|^2+2|q||q'|$$
$$= |a|^2+|b|^2+|a'|^2+|b'|^2+2\sqrt{(|a|^2+|b|^2)(|a'|^2+|b'|^2)}$$

Pour montre que $|q+q'| \leq |q|+|q'|$, il suffit de montre que

$$A \triangleq (|a|^2+|b|^2)(|a'|^2+|b'|^2) \geq (|a||a'|+|b||b'|)^2 \triangleq B$$

En fait, on a

$$A - B = (|a||b'| - |b||a'|)^2 \geq 0.$$

Soit $K := \{q \mid |q| = 1\} \subseteq \mathbb{H}$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}$ l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-e.v.
$$(a,b,c,d) \mapsto a\mathbb{1} + bi + cj + dk$$

Alors φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-evs normés. où $\mathbb{R}^4$ est muni de la norme euclidienne. Donc, en tant qu'espace topologique, K est homéomorphe à la sphère unité dans $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire $\mathbb{S}^3$.

Puisque q^* (la transposée conjuguée de q comme une matrice cplx) est égal à $\bar{q}$, on a

$$q \in K \Rightarrow \begin{cases} qq^* = q\bar{q} = |q|^2 I_2 = I_2 \\ \det(q) = |q|^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow q \in SU(2).$$

En réciproque, soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SU(2)$, on montre que $A \in K$.

Alors, $A^*A = I_2 \Rightarrow \begin{cases} |a|^2+|b|^2 = 1 \end{cases}$ ①

$$\begin{cases} |c|^2+|d|^2=1 & \text{②} \\ \bar{a}c+\bar{b}d=0 & \text{③} \end{cases}$$

$$\det(A)=1 \Rightarrow ad-bc=1 \qquad \text{④}$$

Si $a=0$, ③ $\Rightarrow b=0$ ou $d=0$, ① $\Rightarrow |b|=1$

Donc, on a $d=0$, $|c|=1$, ④ $\Rightarrow -bc=1 \Rightarrow c=-\bar{b}$.

On a $A=\begin{pmatrix} 0 & -\bar{b} \\ b & 0 \end{pmatrix}$ w/ $|b|=1 \Rightarrow A\in K$.

Si $c=0$, ③ $\Rightarrow b=0$ ou $d=0$, ② $\Rightarrow |d|=1$

Donc, on a $b=0, |a|=1$, ④ $\Rightarrow ad=1 \Rightarrow d=\bar{a}$

On a $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$ w/ $|a|=1 \Rightarrow A\in K$.

Si $a\neq 0$ et $c\neq 0$, ③ $\Rightarrow b\neq 0$ et $d\neq 0$, et $\frac{c}{d}=-\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$.

Soit $\lambda=\frac{c}{d}=-\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$, alors on a $c=\lambda d$ et $b=-\bar{\lambda}a$

① $\Rightarrow |a|^2=\frac{1}{1+|\lambda|^2}$, ② $\Rightarrow |d|^2=\frac{1}{1+|\lambda|^2}$, ④ $\Rightarrow ad=\frac{1}{1+|\lambda|^2}$.

Donc, on a $d=\bar{a}$, et $c=\lambda d=\lambda\bar{a}=-\bar{b}$,

$$A=\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ w/ } |a|^2+|b|^2=1 \Rightarrow A\in K.$$

- Soit $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{H}$ défini par $\alpha(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}=\lambda\cdot\mathbb{1}$.

On vérifie que c'est un morphisme de corps.

Si $q\in\mathbb{H}$ est dans le centre de $\mathbb{H}$. on peut supposer que $q=a\cdot\mathbb{1}+b\cdot i+c\cdot j+d\cdot k$. avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

Alors, $q\cdot i=i\cdot q \Rightarrow a\cdot i-b\cdot\mathbb{1}-c\cdot k+d\cdot j=a\cdot i-b\cdot\mathbb{1}+c\cdot k-d\cdot j$

$$\Rightarrow \quad c = d = 0$$

De même, $q \cdot j = j \cdot q \Rightarrow b = d = 0$.

Donc, $q = a \cdot \mathbb{1} = \alpha(a) \in \mathrm{Im}(\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{H})$.

(2) On utilise le produit scalaire défini en (3). Alors, on peut identifier P au ss-ev de $\mathbb{H}$ orthogonal à $\mathbb{1} \in \mathbb{H}$.

Alors, pour $u \in P$, on a $\langle quq^{-1}, \mathbb{1} \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(quq^{-1}) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(u) = \underset{0}{\underset{\parallel}{\langle u, \mathbb{1} \rangle_{\mathbb{H}}}}$.

Donc, $quq^{-1} \in P$ pour $\forall q \in \mathbb{H}^*$, $u \in P$.

(3). On définit un produit scalaire dans $\mathbb{H}$ par

$$\langle q . q' \rangle_{\mathbb{H}} := \frac{1}{2} \mathrm{tr}(q \bar{q}').$$

Alors, on obtient $\langle q . q \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(q\bar{q}) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(|q|^2 I_2) = |q|^2$.

Donc, la norme $|\text{-}|$ est induit par $\langle -, - \rangle_{\mathbb{H}}$.

Puisque $P \subseteq \mathbb{H}$ est un sous-e.v., $\langle -, - \rangle_{\mathbb{H}}$ se restreint en un produit scalaire sur P, noté par $\langle -, - \rangle_P$.

On vérifie que $\phi_q : P \longrightarrow P$ préserve $\langle -, - \rangle_P$.

En fait, $\forall u, v \in P$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \phi_q(u), \phi_q(v) \rangle_P &= \frac{1}{2} \mathrm{tr}\left(\phi_q(u) \overline{\phi_q(v)}\right) \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{tr}\left(quq^{-1} \overline{qvq^{-1}}\right) \quad \text{vérifie que } \overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q}, \forall q, q' \in \mathbb{H}. \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{tr}\left(quq^{-1} \bar{q}^{-1} \bar{v} \bar{q}\right) \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{tr}\left(u \cdot (\bar{q}q)^{-1} \cdot \bar{v} \cdot (\bar{q}q)\right) \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{tr}\left(u \cdot |q|^{-2} I_2 \cdot \bar{v} \cdot |q|^2 I_2\right) \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{tr}(u\bar{v}) = \langle u, v \rangle_P.
\end{aligned}$$

Donc, ϕ définit une application

$$\phi : \mathbb{H}^* \longrightarrow \mathrm{Isom}(P)$$
$$q \longmapsto \phi_q.$$

On vérifie que $\phi_q = \phi_{q'} \Leftrightarrow q u q^{-1} = q' u q'^{-1}, \forall u \in P$

$$\Leftrightarrow q'^{-1} q u = u q'^{-1} q, \ \forall u \in P$$
$$\Leftrightarrow q'^{-1} q \text{ commutes avec } P.$$

Puisque $\mathbb{1}$ est dans le centre de $\mathbb{H}$

$$\Leftrightarrow q'^{-1} q \quad \text{commutes avec } \mathbb{H}$$
$$\overset{\text{par (i)}}{\Leftrightarrow} q'^{-1} q \in \mathbb{R}$$

Donc ϕ induit une injection (on utilise $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, et $P \cong \mathbb{R}^3$).

$$\phi' : \mathbb{R}P^3 = (\mathbb{R}^4)^* / \mathbb{R} \cong \mathbb{H}^* / \mathbb{R} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Isom}(P)}_{\text{gp de isométrie}} \cong SO(3).$$

ϕ' est surjectif.

En fait, la rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ (la sphère unité)

est réalisé par ϕ_q où $q = \cos\frac{\theta}{2} \mathbb{1} + \sin\frac{\theta}{2}(n_1 i + n_2 j + n_3 k) \in K \subseteq \mathbb{H}^*$.

Puisque $\mathbb{R}P^3$ est cpt, SO_3 est séparé, ϕ' est un homéomorphism.

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^3 \cong SU(2) \cong K \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{revêtement double}"'] & \mathbb{H}^* \cong \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \arrow[dl] \arrow[dd, "\phi"] \\
\mathbb{R}P^3 \arrow[dr, "\phi'", "\cong"'] & \\
& \mathrm{Isom}(P) \cong SO(3)
\end{tikzcd}$$

L'application

$$SU(2) \cong K \hookrightarrow \mathbb{H}^* \xrightarrow{\phi} \mathrm{Isom}(\varphi) \cong SO(3)$$

est égal à

$$SU(2) \cong \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{RP}^3 \xrightarrow[\phi']{\cong} SO(3)$$

où ϕ' est un homéomorphisme.

Donc, il est un revêtement double.

Exercise 6.

(1). Soit a, b sont homéomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$a(x,y) = (x+1, y) \quad \text{et} \quad b(x,y) = (-x, y+1), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit $\Gamma = \langle a, b \rangle$ le sous-groupe engendré par a et b dans $\mathrm{Homeo}(\mathbb{R}^2)$, le groupe de homéomorphismes de $\mathbb{R}^2$.

Considère le morphisme $\Sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ défini par $\Sigma(1) = -\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

On définit une application

$$\phi : \mathbb{Z} \rtimes_{\Sigma} \mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma$$

$$(n, m) \longmapsto a^n b^m.$$

Puisque a, b satisfont $ba = a^{-1}b$, ϕ est un morphisme de gp.

$$\phi\big((n,m)\cdot(n',m')\big) = \phi(n + \Sigma(m)(n'), m+m') = a^{n+(-1)^m n'} b^{m+m'}$$

$$\phi(n,m)\cdot\phi(n',m') = a^n b^m \cdot a^{n'} b^{m'} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par } ba = a^{-1}b}}{=} a^n a^{(-1)^m n'} b^m b^{m'}$$

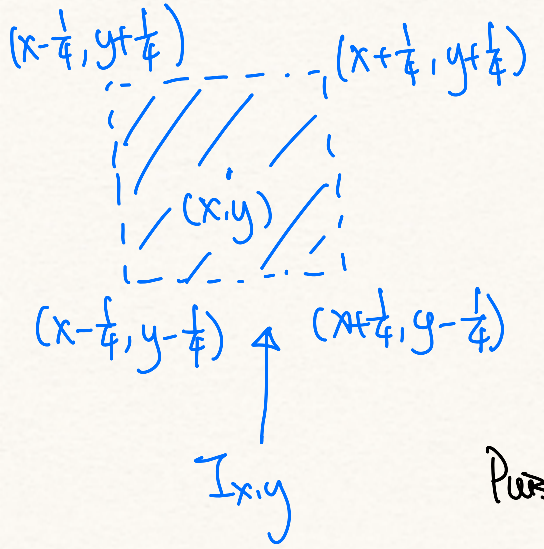
Pour la même raison, tout élément de Γ peut s'écrire comme $a^n b^m$ pour certains n et m. Donc ϕ est surjectif.

Finalement, ϕ est injectif, parce que $a^n b^m (x,y) = \left((-1)^m x + n, y+m\right)$.

(2) Pour $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$I_{x,y} := (x - \tfrac{1}{4}, x + \tfrac{1}{4}) \times (y - \tfrac{1}{4}, y + \tfrac{1}{4}) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Alors, on peut vérifier que $g(I_{x,y}) \cap I_{x,y} = \phi$, $\forall g \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}$.



Soit $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma = K$ l'application quotien. Alors $p(I_{x,y})$ est un voisinage ouvert de $p(x,y)$ dans K qui est homeomorphe à $I_{x,y} \cong \mathbb{R}^2$. Donc K est une variété.

Puisque $\mathbb{R}^2$ est connexe par arc, et p envoie des arcs dans $\mathbb{R}^2$ sur des arcs dans K. Donc K est également connexe par arc.

K est cpt. par (3).

(3). $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma = K$ est le revêtement universel de K.

On définit $\Gamma' = \langle a, b^2 \rangle$ le sous-gp de Γ engendré par a et b^2.

Alors, sous l'isomorphisme $\Gamma \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, Γ' correspondre à $\mathbb{Z} \rtimes 2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} < \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$. Il est un sous-gp d'ordre 2.

Donc $q: \mathbb{R}^2/\Gamma' \to \mathbb{R}^2/\Gamma = K$ est un revêtement double.

On définit

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 .$$
$$(x,y) \longmapsto (x, 2y)$$

Il est un homéomorphism. Il induit un homéomorphism

$$\mathbb{R}^2/\Gamma' \cong \mathbb{R}^2 / \{(x,y) \sim (x+1, y) \text{ et } (x,y) \sim (x, y+1)\}.$$

$$\cong \mathbb{R}/\{x \sim x+1\} \times \mathbb{R}/\{y \sim y+1\}$$

$$= \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$$= S^1 \times S^1.$$

(4) Soit $\Gamma_1 = \langle a \rangle \subseteq \Gamma$ le ss-gp engendré par a, il induit un revêtement.

$$p_1 : \mathbb{R}^2 / \{(x,y) \sim (x+1, y)\} = \mathbb{R}^2/\Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma = K$$

$$\mathbb{R}^2 / \{(x,y) \sim (x+1, y)\} \cong \mathbb{R}/\{x \sim x+1\} \times \mathbb{R} \cong S^1 \times \mathbb{R}$$

Puisque Γ_1 est distingué dans Γ, p_1 est galoisien.

Pour la deuxième partie, on définit $\Gamma_2 = \langle b \rangle \subseteq \Gamma$ le ss-gp engendré par b. Alors,

$$\mathbb{R}^2/\Gamma_2 = \mathbb{R}^2/\{(x,y) \sim (-x, y+1)\} \cong \mathcal{M} \text{ par Feuille 1. Exercise 6.}$$

Puisque Γ_2 n'est pas distingué dans Γ, p_2 n'est pas galoisien.

Rmk. On utilise le résultat suivant:

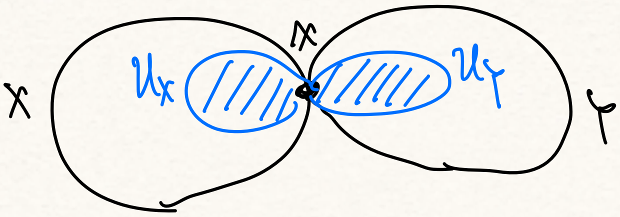
Soit $p : X \to B$ un revêtement qui correspondre a ss gp G de $\pi_1(B, b)$. Alors, p est galois ssi G est distingué.

Exercise 7.

(1) Par définition, $\forall x \in X$ admet un voisinage ouvert qui est homéomorphe à l'espace euclidien qui se rétracte par déformation sur l'origine.

(2) Supposons que $\mathcal{U}_x$ est un voisinage de x dans X qui se rétracte par déformation sur x, et $\mathcal{U}_Y$ est un voisinage de x dans Y ayant la même propriété.

On définit $A = X \vee \mathcal{U}_Y$, $B = \mathcal{U}_X \vee Y$. Alors, A et B sont ouverts dans $X \vee Y$, et $X \vee Y = A \cup B$.



On peut appliquer théorème de VK à A et B, on obtient

$$\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(A) *_{\pi_1(A \cap B)} \pi_1(B) \qquad (*)$$

Puisque $\mathcal{U}_Y$ se rétracte par déformation sur x, $A = X \vee \mathcal{U}_Y$ se rétracte par déformation sur X, et donc on a $\pi_1(A, x) \cong \pi_1(X, x)$

De même, on a $\pi_1(B, x) \cong \pi_1(Y, x)$

Par ailleurs, $A \cap B = \mathcal{U}_X \vee \mathcal{U}_Y$ se rétracte sur x, et donc on a

$$\pi_1(A \cap B, x) \cong \pi_1(x, x) = \{1\}.$$

Donc, l'équation $(*)$ devient $\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$.

(3). On prouve par récurrence que $\pi_1(\mathbb{C}P^n)$ est trivial pour $n \geq 1$.

Si $n = 1$. $\mathbb{C}P^1 = \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ où $\mathcal{U}_0 = \{[x_0 : x_1] \mid x_0 \neq 0\}$, $\mathcal{U}_1 = \{[x_0 : x_1] \mid x_1 \neq 0\}$.

Alors, $\mathcal{U}_0 \cong \mathcal{U}_1 \cong \mathbb{C}$, $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1 \cong \mathbb{C}^*$

Soit $p = [1 : 1] \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$, par théorème de VK, on a

$$\pi_1(\mathbb{C}P^1, p) \cong \pi_1(\mathcal{U}_0, p) *_{\pi_1(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1, p)} \pi_1(\mathcal{U}_1, p) = \{1\}.$$

Si $n \geq 2$. On suppose $\pi_1(\mathbb{C}P^{n-1})$ est trivial.

Soit $p = [1:0:\cdots:0] \in \mathbb{C}P^n$, $\mathcal{U} = \mathbb{C}P^n \setminus \{p\}$.

On définit $\phi : \mathbb{C}P^n \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \longmapsto [x_1 : \cdots : x_n].$$

Alors ϕ réalise $\mathbb{C}P^n \setminus \{p\}$ comme un fibré endroit sur $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Donc, $\mathcal{U}$ est homotopiquement équivalent à $\mathbb{C}P^{n-1}$.

En particulier, on a $\pi_1(\mathcal{U}) \cong \pi_1(\mathbb{C}P^{n-1}) = \{1\}$

Soit $V = \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}P^n$. Alors $p \in V$, et donc $\mathbb{C}P^n = \mathcal{U} \cup V$.

Puisque $V \cong \mathbb{C}^n$, on a $\pi_1(V) \cong \{1\}$.

L'espace $\mathcal{U} \cap V = \mathcal{U} \setminus \{p\} \cong \mathbb{C}^n \setminus \{(0,\cdots,0)\}$ est connexe par arc.

Donc, par théorème de KV, on a

$$\pi_1(\mathbb{C}P^n) = \pi_1(\mathcal{U}) *_{\pi_1(\mathcal{U} \cap V)} \pi_1(V) = \{1\}.$$

(4). On prouve par récurrence sur le cardinal de X.

Si le cardinal de X est égal à 1. Puisque M est une variété topologique, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x t.q. $\mathcal{U} \cong \mathbb{R}^n$, et x correspondre à l'origine.

On définit $V = M \setminus \{x\}$. On a $M = \mathcal{U} \cup V$.

Par ailleurs, $\mathcal{U} \cap V = \mathcal{U} \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{(0,\cdots,0)\}$ est homotopiquement equivalent à $\mathbb{S}^{n-1}$. Donc, par théorème de KV, on obtient

$$\pi_1(M) \cong \pi_1(M\setminus\{x\}) *_{\pi_1(\mathcal{U}\cap V)} \pi_1(\mathcal{U})$$

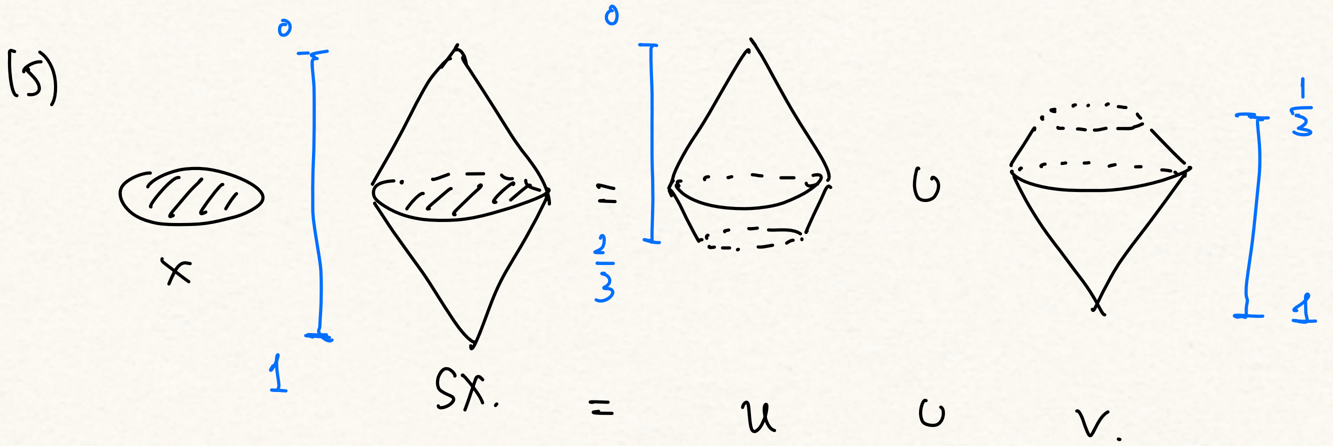
où $\pi_1(\mathcal{U}) = \pi_1(\mathbb{R}^n) = \{1\}$, $\pi_1(\mathcal{U}\cap V) = \pi_1(S^{n-1}) = \{1\}$ $(n \geq 2)$

Donc, on a $\pi_1(M) \cong \pi_1(M\setminus\{x\})$.

Si le cardinal de X est égal à $m \geq 2$. Soit $x \in X$, soit $X' = X\setminus\{x\}$.
Alors, X' est de cardinal $m-1$. Donc, par l'hypothèse de récurrence,
on a $\pi_1(M\setminus X') \cong \pi_1(M)$. Par ailleurs, on peut appliquer le cas où
le cardinal $= 1$ et obtient $\pi_1((M\setminus X')\setminus\{x\}) \cong \pi_1(M\setminus X')$.

Donc, on a $\pi_1(M\setminus X) \cong \pi_1(M\setminus X') \cong \pi_1(M)$.

(5)



Soit $p : X\times[0,1] \longrightarrow SX$ l'application quotient.
On définit $\mathcal{U} = p(X\times[0,\frac{2}{3}))$ et $V = p(X\times(\frac{1}{3},1])$.
Alors $\mathcal{U}, V$ sont ouverts,

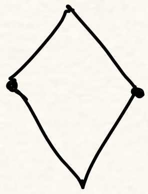
et $\mathcal{U}\cap V = p(X\times(\frac{1}{3},\frac{2}{3})) \cong X\times(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ est connexe par arc.

Puisque $\mathcal{U}$ se rétracte par déformation sur le sommet $p(X\times\{0\})$,
on a $\pi_1(\mathcal{U}) = \{1\}$.
De même, on a $\pi_1(V) = \{1\}$.
Par théorème de KV, on obtient

$$\pi_1(SX) = \pi_1(\mathcal{U}) *_{\pi_1(\mathcal{U}\cap V)} \pi_1(V) = \{1\}.$$

Contreexample quand X n'est pas connexe par arc :

$$X = \{*\} \sqcup \{*\} = \bullet \quad \bullet$$

Alors, on a $SX =$  $\cong \mathbb{S}^1$ qui n'est pas simplement connexe.

(6) On définit $\mathcal{U} = \{[x:y:z] \mid x \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}P^2$.

Alors, $\mathcal{U} \cong \mathbb{R}^2 \cong$ disc ouvert.

Soit $p = [1:0:0] \in \mathbb{R}P^2$.

On définit $V = \mathbb{R}P^2 \setminus \{p\}$, et

$$\begin{aligned} \phi : V = \mathbb{R}P^2 \setminus \{p\} &\longrightarrow \mathbb{R}P^1 \\ [x:y:z] &\longmapsto [y:z] \end{aligned}$$

L'application ϕ réalise V comme un fibré en droit sur $\mathbb{R}P^1$.

Soit $A = \{[y:z] \mid y \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}P^1$, $B = \{[y:z] \mid z \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}P^1$.

Alors, $A \cong \mathbb{R}$: $[y:z] \mapsto \frac{z}{y}$

$B \cong \mathbb{R}$: $[y:z] \mapsto \frac{y}{z}$.

$\phi|_{\phi^{-1}(A)} : \phi^{-1}(A) \longrightarrow A$ est trivial.

$$\begin{tikzcd} \phi^{-1}(A) \arrow[r, "\cong"', "\beta_A"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \arrow[d, "pr_2"] \\ A \arrow[r, "\cong", "\alpha_A"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {[x:y:z]} \text{ w/ } y\neq 0 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\phi"'] & \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) \arrow[d, "pr_2"] \\ {[y:z]} \text{ w/ } y\neq 0 \arrow[r, mapsto] & \frac{z}{y} \end{tikzcd}$$

De même pour $\phi|_{\phi^{-1}(B)}$.

Sur $A \cap B = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\left(\frac{s}{r}, \frac{1}{r}\right) \arrow[d, "pr_2"'] & \left[\frac{s}{r} : \frac{1}{r} : 1\right] = [s:1:r] \arrow[l, mapsto, "\beta_B"'] \arrow[d, "\phi"] & (s,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\} \arrow[l, mapsto, "\beta_A^{-1}"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
\frac{1}{r} & \left[\frac{1}{r} : 1\right] = [1:r] \arrow[l, mapsto, "\alpha_B"] & r \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \arrow[l, mapsto, "\alpha_A^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Donc, la fonction de transition

$$g : \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}P^1}}{A \cap B} = \{[y:z] \mid y \neq 0, z \neq 0\} \longrightarrow GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$$

est donné par $g([y:z]) = \frac{1}{r} = \frac{y}{z}$.

Donc, on obtient $V \cong \mathcal{O}(1)$ comme fibré endroit,

et $V \cong \mathrm{Tot}(\mathcal{O}(1)) \cong \underbrace{\mathrm{Tot}(\mathcal{O}(-1))}_{\substack{\text{S}|| \\ \text{ruban de Möbius}}}$ comme espace topologique

Puisque $U \cap V = U\setminus\{p\} \cong \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a $\pi_1(U\cap V) \cong \mathbb{Z}$

Puisque V se rétracte par déformation sur $\mathbb{R}P^1$,

on a $\pi_1(V) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$.

L'application $\pi_1(U\cap V) \longrightarrow \pi_1(V)$ induit par l'inclusion $U\cap V \hookrightarrow V$.

~~est~~ donc donné par la projection $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}P^1$

Équivalence d'homotopie.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \arrow[r] \arrow[d, "\wr S"] & \mathbb{R}P^1 \\
U\cap V \arrow[r] & V \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(y,z) \arrow[d, mapsto] & & {[y:z]} \\
{[1:y:z]} \arrow[rr, mapsto] & & {[1:y:z]} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Donc, il est donné par

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathcal{U} \cap V) \xrightarrow{\times 2} \pi_1(V) \cong \mathbb{Z}.$$

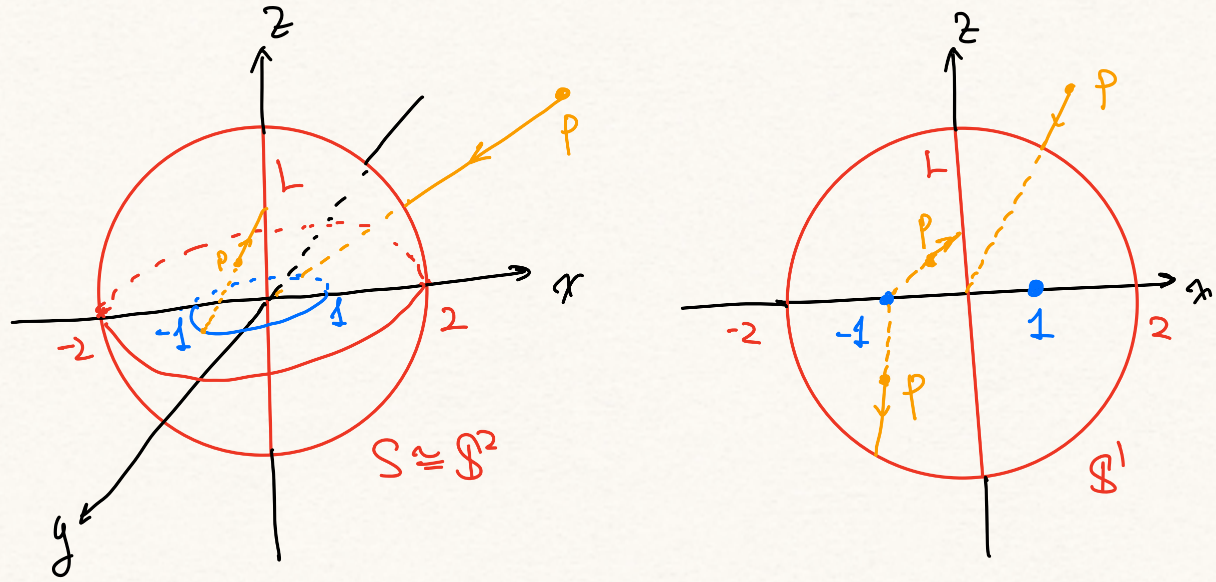
Par théorème de KV, on obtient

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \pi_1(\mathcal{U} \cup V) &= \pi_1(\mathcal{U}) *_{\pi_1(\mathcal{U} \cap V)} \pi_1(V) \\ &= \{1\} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \quad \text{où } \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \\ &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

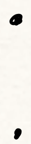
D.

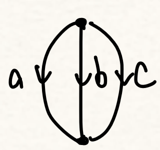
Exercice 8.

(1)

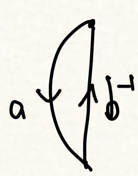


Soit $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la sphère de centre à l'origine et de rayon 2. Alors, par la rotation autour de l'axe z, il suffit de construire une rétraction par déformation de $\mathbb{R}^2_{(x,z)} \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ sur la réunion du cercle unité et d'un diamètre (partie rouge dans la figure en haut à droite). Une rétraction est comme indiqué par la partie jaune dans la même figure.

(2) $X_0 =$  $\cong \{2 \text{ points}\}$

$X_1 =$ 

$\cong \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{Z}\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ le gp libre engendré par

$\gamma_1 =$ 

$= ab^{-1}$ et $\gamma_2 =$ 

$= cb^{-1}$

Pour obtenir X_2, on colle deux $\mathbb{D}^2$ au X_1. L'applications d'attachement $\mathbb{S}^1 \longrightarrow X_1$ induisent deux morphismes

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{Z}\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle.$$

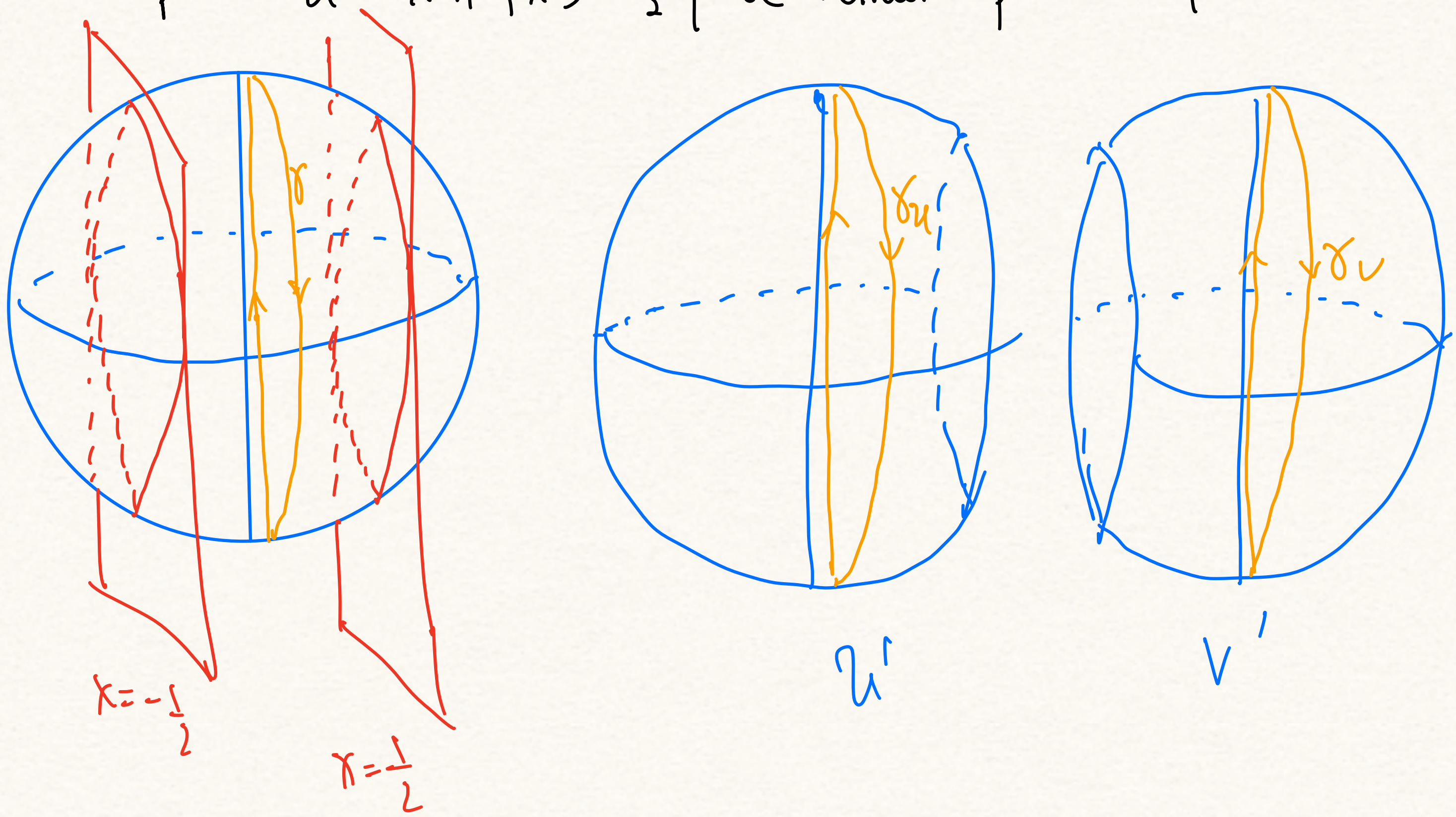
Ils sont donné par $1 \longmapsto ac^{-1} = \gamma_1 \gamma_2^{-1}$

et $1 \longmapsto ca^{-1} = \gamma_2 \gamma_1^{-1}$

Donc, on obtient (par théorème de VK)

$$\pi_1(X) \cong \pi_2(X_2) \cong \mathbb{Z}\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \big/ (\gamma_1 \gamma_2^{-1}) \cong \mathbb{Z}.$$

(3) La partie $\mathcal{U} := X \cap \{x > -\frac{1}{2}\}$ se rétract par déformation



sur $\mathcal{U}'$, qui est homotopiquement équivalent à $\mathbb{S}^1$. Donc, on a

$$\pi_1(\mathcal{U}) \cong \pi_1(\mathcal{U}') \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z},$$

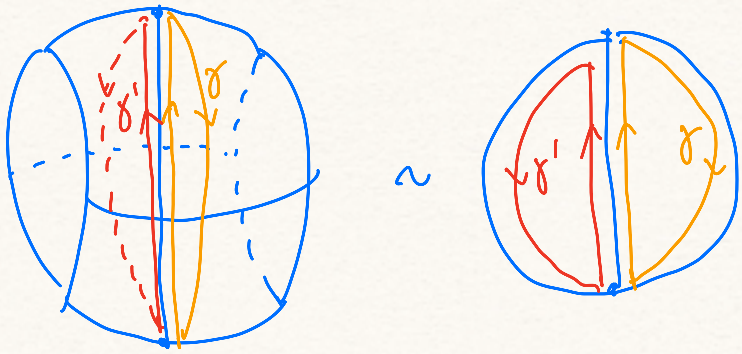
où $\gamma_{\mathcal{U}}$ est un générateur de $\pi_1(\mathcal{U})$

De la même manière, on obtient

$$\pi_1(V) \cong \pi_1(V') \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

avec le même générateur γ_V.

Par ailleurs, $\mathcal{U}\cap V$ se rétract par déformation sur $\mathcal{U}'\cap V'$, qui est

$\mathcal{U}'\cap V' =$  $\simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$

homotopiquement équivalent à $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Donc, on a

$$\pi_1(\mathcal{U}\cap V) \cong \pi_1(\mathcal{U}'\cap V') \cong \pi_1(\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

avec deux générateurs γ et γ'.

Le plongement $\mathcal{U}\cap V \hookrightarrow \mathcal{U}$ induit un morphisme

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathcal{U}\cap V) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{U}) \cong \mathbb{Z}$$

envoie γ et γ' sur $\gamma_{\mathcal{U}}$. La même pour $\pi_1(\mathcal{U}\cap V) \to \pi_1(V)$.

Donc, par le théorème de KV, on obtient

$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}\langle\gamma_{\mathcal{U}}\rangle \underset{\mathbb{Z}\langle\gamma,\gamma'\rangle}{*} \mathbb{Z}\langle\gamma_V\rangle$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}\langle\gamma,\gamma'\rangle &\longrightarrow \mathbb{Z}\langle\gamma_{\mathcal{U}}\rangle \\ \gamma &\longmapsto \gamma_{\mathcal{U}} \\ \gamma' &\longmapsto \gamma_{\mathcal{U}} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \mathbb{Z}\langle\gamma,\gamma'\rangle &\longrightarrow \mathbb{Z}\langle\gamma_V\rangle \\ \gamma &\longmapsto \gamma_V \\ \gamma' &\longmapsto \gamma_V \end{aligned}$$

Donc, $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}\langle\gamma_{\mathcal{U}},\gamma_V\rangle / (\gamma_{\mathcal{U}}\gamma_V^{-1}) \cong \mathbb{Z}$.

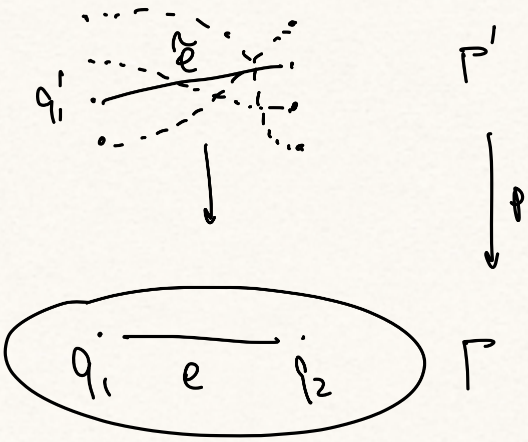
$\square$.

Exercise 9.

(1). On peut supposer que Γ est connexe, donc tous les fibres ont le même cardinal.

On définit $V := p^{-1}(V(\Gamma))$,

Pour tout $e \in E(\Gamma)$ qui relie q_1 et $q_2 \in V(\Gamma)$, et pour tout $q_1' \in p^{-1}(q_1)$, il existe un unique relèvement $\tilde{e}$ t.q. $\tilde{e}$ est incidente au q_1'.



Si on fixe q_1, q_2, e, alors on établir une bijection entre $p^{-1}(q_1)$ et $p^{-1}(q_2)$ t.q. pour deux pts correspondants, il existe un relèvement de e.

Il n'est pas difficile de voir que $p^{-1}(e)$ est la réunion de tous les relèvements ci-dessus.

Donc, Γ' est le graphe avec les sommets $V(\Gamma') = p^{-1}(V(\Gamma))$, et les arêtes $E(\Gamma') = \{$relèvements de $E(\Gamma)\}$.

Par l'argument ci-dessus, on obtient que

$$p^{-1}(q) \cong \{q\} \times F \quad \text{et} \quad p^{-1}(e) \cong e \times F$$

pour $\forall q \in V(\Gamma)$ et $e \in E(\Gamma)$, où F est la fibre.

Donc, quand $\deg(p) < \infty$, on obtient

$$\# V(\Gamma') = \deg(p) \cdot \# V(\Gamma) \quad \text{et} \quad \# E(\Gamma') = \deg(p) \cdot \# E(\Gamma).$$

Par conséquence, on a

$$\chi(\Gamma') = \deg(p) \cdot \chi(\Gamma).$$

(2) Puisque $\chi(\Gamma)$ est défini, Γ est fini (i.e. $\#E(\Gamma) < \infty$ et $\#V(\Gamma) < \infty$).

On proceed par induction sur $\#V(\Gamma)$.

Si $\#V(\Gamma) = 1$, alors, $\Gamma = \{*\}$ sans arêtes et $\#E(\Gamma) = 0$

Donc, $\chi(\Gamma) = \#V(\Gamma) - \#E(\Gamma) = 1 - 0 = 1$.

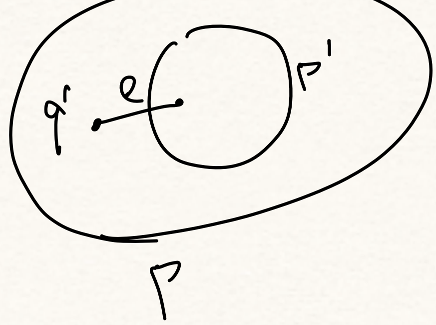
Si $\#V(\Gamma) > 1$, On fixe un sommet $q \in V(\Gamma)$. Puisque $\#V(\Gamma) > 1$, q est adjacent à un autre pt q_1. Suppose que on obtient $q_i\,(1 \le i \le n)$ t.q ils

$$q_0 = q \quad q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n \quad q_{n+1}$$

sont 2 à 2 distinct, et q_i est adjacent à q_{i+1}. Si q_n est adjacent à un autre point q' que q_{n-1}, alors $q' \notin \{q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}\}$ parce que Γ est simplement connexe. On pose $q_{n+1} = q_n$ et on répète ce procédé. Alors, soit on obtient un chemin infini dont les sommets intermédiaires sont 2 à 2 distincts, ce qui contredit la finitude du Γ. Soit on atteint un sommet q' qui est adjacent à un seul autre sommet via l'arête e.

(Un sommet ayant cette propriété est appelé une feuille de l'arbre Γ. Ce qu'on vient de montrer, c'est que tout arbre fini possède au moins une feuille).

Soit $\Gamma' = \Gamma \setminus \{q', e\}$. Alor Γ' est encore un arbre avec



$\#V(\Gamma') = \#V(\Gamma) - 1$. Donc, par l'hypothèse de récurrence, on obtient $\chi(\Gamma') = 1$.

Puisque $\#E(\Gamma') = \#E(\Gamma) - 1$, on a

$$\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma') = 1.$$

(3) Soit S l'ensemble de tous les arbres contenus dans Γ. On définit une relation d'ordre partiel sur S par l'inclusion. Alors, tous les singletons (i.e., sous-graphes réduits à un seul sommet, sans arêtes) sont dans S. En particulier, $S \neq \phi$. Donc, par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal dans S. Soit $T \subseteq \Gamma$ un arbre maximal, on montre que il passant par tous les sommets de Γ.

Alors, sinon, soit q un sommet de Γ qui n'est pas dans T.

Puisque Γ est connexe, soit $q' \in V(\Gamma)$ quelconque, il existe un chemin

$$q_0 = q' \cdot \xrightarrow{e_0} \underset{q_1}{\cdot} \xrightarrow{e_1} \cdot \quad \cdots \quad \cdot \xrightarrow{e_n} \cdot q_n = q$$

$(q_0 = q', q_1, q_2, \cdots, q_n = q)$. Comme $q' \in V(\Gamma)$ et $q \notin V(\Gamma)$, il existe $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ t.q. $q_i \in V(\Gamma)$, $q_{i+1} \notin V(\Gamma)$.

Alors, $T' := T \cup \{q_{i+1}, e_i\}$ est encore un arbre.

(puisque e_i est la seule arête dans T' qui est incident au q_{i+1}).

Comme T' contient T, cela contredit la maximalité de T.

Donc, T passant par tous les sommets de Γ.

(4). A priori, Γ/T est encore un graphe.

Puisque $V(T) = V(\Gamma)$, Γ/T contient un seul sommet.

Par ailleur, les arêtes dans Γ/T correspondre les arêtes de Γ qui n'est pas contenu dans T.

Donc, on obtient $\Gamma/T = R_{\#E(\Gamma) - \#E(T)}$.

Par (2), on sait que

$$\#E(T) = \#V(T) - \chi(T) = \#V(\Gamma) - 1 = \#E(\Gamma) + \chi(\Gamma) - 1.$$

Donc, on a

$$\#E(\Gamma) - \#E(T) = 1 - \chi(\Gamma)$$

et

$$\Gamma/T = R_{1-\chi(\Gamma)} = R_n \quad \text{où} \quad 1 - n = \chi(\Gamma).$$

Par Exercice 7.(2), on obtient

$$\pi_1(R_n) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ fois } \mathbb{Z}} = F_n.$$

le gp libre engendré par n éléments.

Puisque T est un arbre fini, il est contractile, et donc Γ est homotopiquement équivalent à Γ/T. On obtient

$$\pi_1(\Gamma) \cong \pi_1(\Gamma/T) = \pi_1(R_n) \cong F_n.$$

(5) Soit G un ssgp d'indice d de F_n.

Puisque $\pi_1(R_n) \cong F_n$, G correspondre à un revêtement à d-feuilles

$$p : \Gamma \longrightarrow R_n.$$

Par (1), Γ est encore un graphe. Il possède un arbre couvrant T par (4). On a

$$\pi_1(\Gamma) \cong \pi_1(\Gamma/T) \cong F_m$$

où $m = 1 - \chi(\Gamma)$.

Puisque p est un revêtement de degrée d, on a

$$\chi(\Gamma) = d \cdot \chi(R_n) = d \cdot (1-n)$$

par (i).

Donc, $m = 1 - \chi(\Gamma) = 1 + d(n-1)$

Par construction de Γ, on a $G \cong \pi_1(\Gamma) \cong R_m$ est un gp libre.

La relation entre d, n et m est donnée par

$$m = 1 + d(n-1).$$

$\square$.