TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE - FEUILLE 11 & 12

Exercice 1: Théorème d'écrasement.

On dit que (X, A) est une bonne paire si A est un fermé non vide de X et il existe un voisinage de A dans X qui se rétracte par déformation sur A.

(1) Montrer que si X est un CW-complexe et $A \subset X$ est un sous-complexe, alors (X, A) est une bonne paire.

(2) Soit M un groupe abélien. Montrer que si (X, A) est une bonne paire alors on a

$$H_n(X, A; M) \simeq H_n(X/A, \{A\}; M)$$

pour tout $n \geq 0$ où $\{A\}$ désigne le singleton représenté par A dans le quotient X/A.

(3) En déduire que pour tout $n > 0$ on a l'isomorphisme $H_n(X, A; M) \simeq H_n(X/A; M)$.

Exercice 2: Calculs de groupes d'homologie.

(1) Soit (X, x) et (Y, y) deux espaces topologiques pointés qui forment chacun une bonne paire. Calculer $H_n(X \vee Y; M)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction des groupes d'homologie de X et Y.

(2) Soit X un espace topologique et $SX = X \times [0,1]/\sim$ où $(x, t) \sim (y, s)$ si $s = t = 0$ ou $s = t = 1$ ou ($s = t$ et $x = y$). Montrer que $S\mathbb{S}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n+1}$.

(3) Calculer les groupes d'homologie $H_n(SX; M)$ en fonction de ceux de X.

(4) Montrer que le tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ a les mêmes groupes d'homologie que $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ mais que ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.

(5) Montrer que pour tout espace topologique X et pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, on a

$$H_k(X \times \mathbb{S}^n; M) = H_k(X; M) \oplus H_{k-n}(X; M).$$

Exercice 3: Autour du degré.

(1) Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application continue. Montrer que si $\deg(f) \neq 0$ alors f est surjective. La réciproque est-elle vraie?

(2) Montrer que si f n'a pas de point fixe, alors $\deg(f) = (-1)^{n+1}$ (on montrera que f est homotope à l'application antipode).

(3) Soit $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$ une application continue. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{S}^{2n}$ tel que $f(x) \in \{x, -x\}$.

(4) Montrer que tout groupe non trivial G agissant continûment et librement sur $\mathbb{S}^{2n}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(5) Démontrer le théorème de la boule chevelue: tout champ de vecteur continu sur la sphère $\mathbb{S}^{2n}$ s'annule quelque part.

(6) Soit $n > 0$, $x_0 \in \mathbb{S}^n$ un point base et $f : (\mathbb{S}^n, x_0) \to (\mathbb{S}^n, x_0)$. Montrer que l'application $\deg : \pi_n(\mathbb{S}^n, x_0) \to \mathbb{Z}$ définie par $[f] \mapsto \deg(f)$ est un morphisme de groupe.

Exercice 4: Homologie cellulaire.

Calculer l'homologie cellulaire à coefficients entiers des espaces suivants:

(1) Les espaces projectifs réels $\mathbb{RP}^n$.

(2) Les surfaces de genre $g \geq 0$.

(3) La bouteille de Klein $K = \mathbb{R}^2/\sim$ où $\sim$ est la relation engendrée par $(x, y) \sim (x + 1, y) \sim (-x, y + 1)$.

(4) L'espace $X_n = D^2/\sim$ où $x \sim e^{2i\pi/n}x$ pour tout $x \in \partial D^2$.

(5) Construire un CW-complexe X montrant que l'annulation de $H_k(X; \mathbb{Q})$ n'implique pas nécessairement celle de $H_k(X; \mathbb{Z})$, où H_k désigne l'homologie cellulaire.

(6) Construire un CW-complexe X montrant que l'annulation de $H_k(X; \mathbb{Z})$ n'implique pas nécessairement celle de $H_k(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, où H_k désigne l'homologie cellulaire.

Exercice 5: Caractéristique d'Euler.

On rappelle que si X est un CW-complexe fini, on pose $\chi(X) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \#\{k\text{-cellules de } X\}$.

(1) Montrer que si $f : Y \to X$ est un revêtement de degré d, il existe une structure de CW-complexe sur Y pour laquelle f est cellulaire et de plus $\chi(Y) = d\chi(X)$.
(2) Calculer $\chi(S_g)$ où S_g est une surface de genre g. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (g, h) pour qu'il existe un revêtement $f : S_g \to S_h$.
(3) Montrer que si $X = A \cup B$ où A et B désignent des sous-complexes de X, on a $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.
(4) Montrer que si X et Y sont des CW-complexes finis, il y a une structure naturelle de CW-complexe sur $X \times Y$ et on a $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

Exercice 6: Complémentaire d'entrelacs.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit $\phi_i : \mathbb{S}^1 \times D^2 \to \mathbb{S}^3$ des homéomorphismes sur leurs images L_i supposées disjointes. On appellera entrelacs le sous-espace $L = \bigcup_{i=1}^n L_i$.

(1) Montrer avec la suite exacte de la paire puis l'excision qu'on a les isomorphismes $H_1(\mathbb{S}^3 \setminus L; \mathbb{Z}) \simeq H_2(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^3 \setminus L; \mathbb{Z}) \simeq H_2(L, \partial L; \mathbb{Z})$.
(2) Montrer qu'on a $H_2(L, \partial L; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^n$.
(3) Soit L_0 un entrelacs formé de deux cercles éloignés et L_1 un entrelacs formé de deux cercles enlacés. Montrer que $\mathbb{S}^3 \setminus L_0$ et $\mathbb{S}^3 \setminus L_1$ ne sont pas homotopes.