Exercise 1.

(1) Voir Proposition A.5 [Hatcher, Algebraic Topology] (PDF disponible sur sa page personelle)

(2) Soit $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de A qui se retracte par déformation sur A.

Par le théorème d'excision, on a

$$H_n(X, \mathcal{U}; M) \cong H_n(X \setminus A, \mathcal{U} \setminus A; M). \quad (1)$$

Car $\{A\}$ est un point fermé dans $\mathcal{U}/A$, qui est un ouvert de X/A, par le théorème d'excision, on a

$$H_n(X/A, \mathcal{U}/A; M) \cong H_n((X/A) \setminus \{A\}, (\mathcal{U}/A) \setminus \{A\}; M).$$

Puisque $(X/A) \setminus \{A\} \cong X \setminus A$, et $(\mathcal{U}/A) \setminus \{A\} \cong \mathcal{U} \setminus A$,

on a

$$H_n(X/A, \mathcal{U}/A; M) \cong H_n(X \setminus A, \mathcal{U} \setminus A; M). \quad (2)$$

Par (1) et (2), on obtient

$$H_n(X, \mathcal{U}; M) \cong H_n(X/A, \mathcal{U}/A; M). \quad (3)$$

Puisque $\mathcal{U}$ se retracte par déformation sur A, $\mathcal{U}/A$ se retracte par déformation sur $\{A\}$, et donc on a

$$H_n(X, \mathcal{U}; M) \cong H_n(X, A; M)$$

$$\text{et } H_n(X/A, \mathcal{U}/A; M) \cong H_n(X/A, \{A\}; M).$$

Donc, (3) devient

$$H_n(X, A; M) \cong H_n(X/A, \{A\}; M).$$

(3) Par (2), il suffit de montrer que $H_n(X/A, \{A\}; M) \cong H_n(X/A; M)$ pour $n>0$.

On a la suite exacte longue associée à $(X/A, \{A\})$:

$$H_n(\{A\}; M) \to H_n(X/A; M) \to H_n(X/A, \{A\}; M) \to H_{n-1}(\{A\}; M) \to H_{n-1}(X/A; M).$$

Puisque $H_k(\{A\}; M) = 0$ pour $k>0$

et $H_0(\{A\}; M) \to H_0(X/A; M)$ est injectif,

on obtient un isomorphisme :

$$H_n(X/A; M) \xrightarrow{\cong} H_n(X/A, \{A\}; M) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

$\square$.

Exercice 2.

(1) Soit $Z = X \sqcup Y$ et $A = \{x, y\} \subseteq Z$. Alors (Z, A) est une bonne paire.

Par Exercice 1.(3), on obtient

$$H_n(X \vee Y; M) \cong H_n(Z, A; M), \quad n \geq 1.$$

On a une suite exacte longue suivante :

$$\cdots \to H_k(A) \to H_k(Z) \to H_k(Z, A) \to H_{k-1}(A) \to H_{k-1}(Z) \to \cdots$$

Puisque $H_k(A) = 0$ pour $k \geq 1$

et $H_0(A) \to H_0(Z) : M \oplus M \to M^{\# \text{comp. de } X} \oplus M^{\# \text{comp. de } Y}$ est injectif.

on a un isomorphisme

$$H_k(Z) \longrightarrow H_k(Z, A) \quad \text{pour } \forall k \geq 1.$$

Donc, $H_n(X \vee Y; M) \cong H_n(Z, A; M) \cong H_n(Z) \cong H_n(X) \oplus H_n(Y)$, $\forall n \geq 1$.

$$H_0(X\vee Y; M) \cong M^{\#\text{comp. connexe de } X\vee Y} = M^{\#\text{comp. con de } X + \#\text{ de } Y - 1}$$

$$= H_0(X)\oplus H_0(Y)\big/ M.$$

(3)

SX

Soit $p: X\times[0,1] \to SX$ la projection.

Soit $U := p(X\times[0,2/3))$, $V := p(X\times(1/3,1])$

Alors U et V sont contractile, et

$U\cap V = p(X\times(1/3,2/3))$ se retract par déformation sur $X\times\{\frac{1}{2}\}\cong X$.

Par la suite de MV, on obtient

$$H_k(X) \to H_k(U)\oplus H_k(V) \to H_k(SX) \to H_{k-1}(X) \to H_{k-1}(U)\oplus H_{k-1}(V).$$

Puisque on a $H_k(U) = H_k(V) = 0$ pour $k>0$, on a

$$H_k(SX) \cong H_{k-1}(X) \quad \text{pour } k>1.$$

et

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_1(SX) \arrow[r] & H_0(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & H_0(U)\oplus H_0(V) \arrow[d, phantom, "\cong"] & \\
& & \displaystyle\bigoplus_{\text{comp. conn. de } X} M \arrow[r] & M\oplus M & (1,1) \\
& \text{(pour chaque comp. conn.)} & M\cdot e_i \arrow[u, hook] \arrow[ur, "(id,id)"'] & & e_i \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

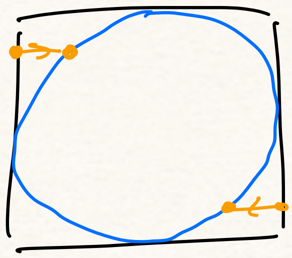
Donc, $H_1(SX) \cong \{\sum n_i e_i \mid \sum n_i = 0\} \cong H_0(X)\big/ M$.

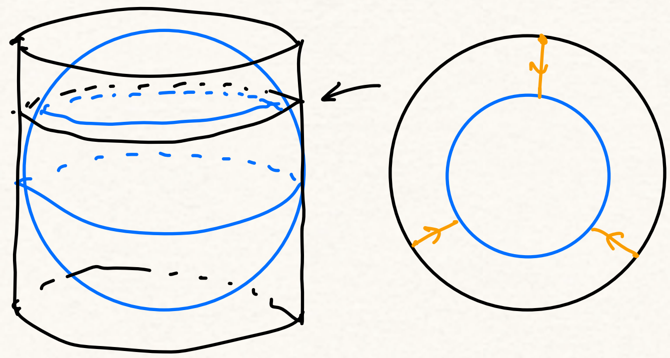
Comme SX est connexe, $H_0(SX) = M$.

(2) Soit $\mathbb{S}^k \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ la sphère unité $(k = 0, 1, \cdots)$

Soit ϕ le morphisme $\mathbb{S}^n \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$

$$(x_1, \cdots, x_n, t) \longmapsto \left(\sqrt{1-t^2}\,x_1, \cdots, \sqrt{1-t^2}\,x_n, t\right)$$





Puisque $\phi(\mathbb{S}^n \times \{1\}) = (0, \cdots, 0, 1)$

$\phi(\mathbb{S}^n \times \{-1\}) = (0, \cdots, 0, -1)$

ϕ induit une bijection $\tilde{\phi} : S\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$.

Puisque $S\mathbb{S}^n$ est cpt, $\mathbb{S}^{n+1}$ est Hausdorff, $\tilde{\phi}$ est un homéomorphisme.

(4). Par (1), on peut calculer

$$H_k(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & k=1 \\ \mathbb{Z} & k=2 \\ 0 & k \geq 3. \end{cases}$$

Par (5), on a

$$H_k(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \cong H_k(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \oplus H_{k-1}(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$$

$$\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & k=1 \\ \mathbb{Z} & k=2 \\ 0 & k\geq 3 \end{cases}$$

(On peut aussi calculer $H_k(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1;\mathbb{Z})$ en utilisant une suite de MV.

Une indice : soit $p\in\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$, $U := \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\setminus\{p\}$, $V\cong\mathbb{R}^2$ un voisinage ouvert de p).

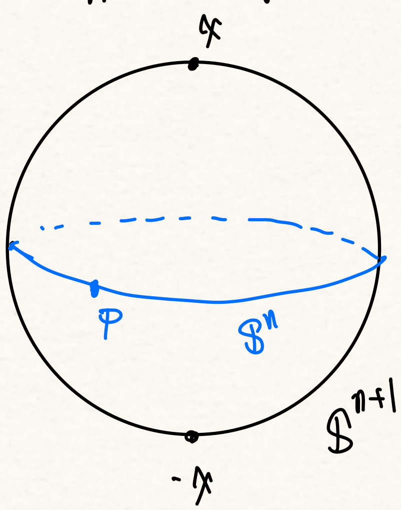
(5). On montre par récurrence que $\forall n\geq 0$, $\exists$ une suite exacte courte

$$0\longrightarrow H_k(X)\xrightarrow{(i_n)_*} H_k(X\times\mathbb{S}^n)\longrightarrow H_{k-n}(X)\longrightarrow 0 \qquad \circledast_n$$

où i_n est l'inclusion $X\cong X\times\{p\}\hookrightarrow X\times\mathbb{S}^n$ pour un point $p\in\mathbb{S}^n$ quelconque

Cas $n=0$ est trivial.

Supposons que $\circledast_n$ est vrai.



Soit $x\in\mathbb{S}^{n+1}$ t.q. l'équateur associé à la paire antipodale $\{x,-x\}$ passe par le point p.

On identifie cet équateur à $\mathbb{S}^n$.

Soit $U=\mathbb{S}^{n+1}\setminus\{-x\}$, $V=\mathbb{S}^{n+1}\setminus\{x\}$.

Alors, $\mathbb{S}^{n+1}=U\cup V$

$U\cap V$ se retract par déformation sur l'équateur

Donc, on a la suite de MV associée à $(X\times U, X\times V)$

$$\cdots\longrightarrow H_k(X\times\mathbb{S}^n)\longrightarrow H_k(X\times U)\oplus H_k(X\times V)\longrightarrow H_k(X\times\mathbb{S}^{n+1})\longrightarrow\cdots \qquad \circledast$$

Puisque U et V sont contractiles, on a

$$H_k(X\times U) \cong H_k(X\times V) \cong H_k(X)$$

induits par les projections sur X.

Donc, ⊛ devient

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_k(X\times \mathbb{S}^n) \arrow[r] \arrow[dr, "{(pr_*,\, pr_*)}"'] & H_k(X\times U)\oplus H_k(X\times V) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H_k(X\times \mathbb{S}^{n+1}) \arrow[r] & \cdots \\
& & H_k(X)\oplus H_k(X) & &
\end{tikzcd}$$

qui induit une suite exacte courte :

$$0 \to \mathrm{Coker}\big((pr_*, pr_*) : H_k(X\times \mathbb{S}^n) \to H_k(X)\oplus H_k(X)\big) \longrightarrow H_k(X\times \mathbb{S}^{n+1}) \qquad ⊛_{n+1}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ker}\big((pr_*, pr_*) : H_{k-1}(X\times \mathbb{S}^n) \to H_{k-1}(X)\oplus H_{k-1}(X)\big) \longrightarrow 0.$$

On regard $pr_* : H_k(X\times \mathbb{S}^n) \longrightarrow H_k(X)$.

Soit $\quad i_n : X \cong X\times\{p\} \hookrightarrow X\times \mathbb{S}^n \quad$ l'inclusion.

Par l'hypothèse de récurrence, on a une suite exacte courte :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_k(X) \arrow[r, "(i_n)_*"] \arrow[dr, "Id"'] & H_k(X\times \mathbb{S}^n) \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "pr_*"] & H_{k-n}(X) \arrow[r] & 0. \\
& & H_k(X) & &
\end{tikzcd}$$

Puisque $pr\circ i_n = Id_X : X \hookrightarrow X\times\mathbb{S}^n \to X$, on a $pr_*\circ (i_n)_* = Id_{H_k(X)}$.

Donc, pr_* est surjective, et le morphism

$$\beta_n : \mathrm{Ker}(pr_*) \hookrightarrow H_k(X\times \mathbb{S}^n) \xrightarrow{\alpha_n} H_{k-n}(X)$$

est un isomorphisme. (injectivité : $\mathrm{Ker}(pr_*)\cap \mathrm{Ker}(\alpha_n) = \mathrm{Ker}(pr_*)\cap \mathrm{Im}(i_{n*}) = \{0\}$.

surjectivité : $\forall \gamma \in H_k(X\times\mathbb{S}^n)$, on a

$$\gamma - in_* \circ pr_* \gamma \in \mathrm{Ker}(pr_*)$$

et

$$\alpha_n(\gamma) = \alpha_n(\gamma - in_* \circ pr_*)$$

Donc, $\mathrm{Im}(\beta_n) = \mathrm{Im}(\alpha_n) = H_{k-n}(X)$).

Par conséquent, dans $\circledast_{n+1}$, on obtient

$$\mathrm{Coker}\big((pr_*, pr_*)\big) = H_k(X) \oplus H_k(X) \Big/ \{(\gamma, \gamma) \mid \gamma \in H_k(X)\} \cong H_k(X)$$

et $\mathrm{Ker}\big((pr_*, pr_*)\big) = \mathrm{Ker}(pr_*) \cong H_{k-1-n}(X)$ (⚠ pr_* dans $\circledast_{n+1}$ est entre l'homologie de degré $k-1$).

On obtient une suite exacte courte

$$0 \to H_k(X) \to H_k(X \times \mathbb{S}^{n+1}) \to H_{k-n-1}(X) \to 0. \qquad \circledast_{n+1}$$

Il reste seulement à vérifier que le premier morphisme dans $\circledast_{n+1}$ est induit par $i_{n+1} : X \cong X \times \{p\} \hookrightarrow X \times \mathbb{S}^{n+1}$. Je vous laisse les détails.

Puisque pr_* est un inverse à gauche de in_*, $\circledast_n$ est scindée, et on obtient un isomorphisme.

$$H_k(X \times \mathbb{S}^n) \cong H_k(X) \oplus H_{k-n}(X).$$

Rmq. Soit $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ une suite exacte courte de R-modules.
Alors il est <u>scindée</u> ssi f admet un inverse à gauche
ssi g admet un inverse à droite.

i.e. $\exists$ isomorphisme de cplx.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow Id_A & \circlearrowleft & \downarrow \varphi & \circlearrowleft & \downarrow Id_C & & \\ 0 & \to & A & \to & A \oplus C & \to & C & \to & 0 \end{array}$$

D.

Exercice 3.

(1) Supposons que f n'est pas surjectif. Alors, il existe un point $p \in S^n \setminus \mathrm{Im}(f)$.

Donc, f se factorise par $S^n \setminus \{p\}$, i.e., $\exists g$ t.q. $f : S^n \xrightarrow{g} S^n\setminus\{p\} \xhookrightarrow{i} S^n$.

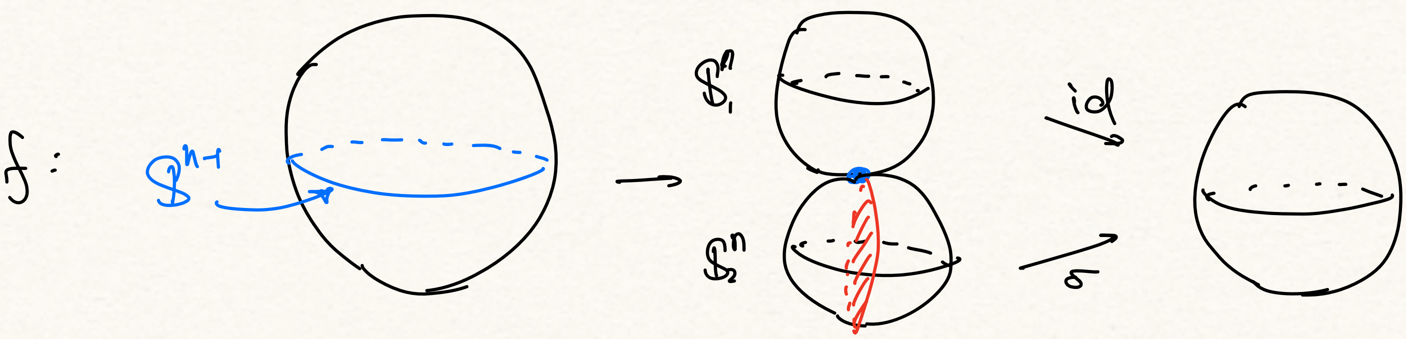
On obtient

$$f_* = i_* \circ g_* : H_n(S^n;\mathbb{Z}) \xrightarrow{g_*} H^n(S^n\setminus\{p\};\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H^n(S^n;\mathbb{Z}).$$

Puisque $S^n\setminus\{p\} \cong \mathbb{R}^n$ et donc $H^n(S^n\setminus\{p\};\mathbb{Z}) \cong 0$, on obtient $f_* = 0$.

Donc $\deg(f) = 0$.

En réciproque, on peut construire f surjectif t.q. $\deg(f) = 0$.



$$f : \quad S^n \xrightarrow{p} S^n/S^{n-1} \cong S^n_1 \vee S^n_2 \xrightarrow{(id,\sigma)} S^n$$

Soit l'application σ est la réflexion par rapport au plan rouge.

Alors $\deg(\sigma) = -1$.

L'application f induit :

$$\begin{tikzcd}
f_* : H^n(S^n;\mathbb{Z}) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & H^n(S^n_1 \vee S^n_2;\mathbb{Z}) \arrow[r, "(id,\sigma)_*"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & H^n(S^n;\mathbb{Z}) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "id_*"] & \mathbb{Z} \\
& \oplus & \\
& \mathbb{Z} \arrow[uur, "\sigma_*"'] &
\end{tikzcd}$$

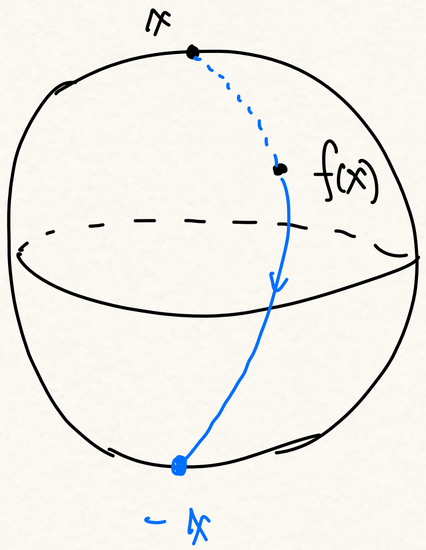
p_* envoie 1 sur $(1, 1)$ car la première composant de p_*

$$\mathbb{Z} \cong H^n(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(\mathbb{S}^n_1;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

est induit par l'application : $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n_1$ qui est défini en contractant l'hémisphère inférieur de $\mathbb{S}^n$, lequel est contractile.
De même pour la seconde composante de p_*.

Donc, $f_*(1) = (\mathrm{id}_* \times \sigma_*)(1,1) = \deg(\mathrm{id}) + \deg(\sigma) = 1 + (-1) = 0$.
Cependant, f est surjectif par définition.

(2) Soit $\tau : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ l'application antipode.



Soit $H : \mathbb{S}^n \times I \longrightarrow \mathbb{S}^n$

$$(x,t) \longmapsto \frac{tf(x) - (1-t)x}{|tf(x) - (1-t)x|}$$

Si (x,t) satisfait $tf(x) = (1-t)x$.

Alors, $t = |tf(x)| = |(1-t)x| = 1-t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow f(x) = x.$$

Cela contredit le fait que f n'a pas de point fixe.

Donc, H est bien défini.

Par ailleurs, $H(x,0) = \dfrac{-x}{|-x|} = -x = \tau(x)$

$$H(x,1) = \frac{f(x)}{|f(x)|} = f(x).$$

Donc, H défini une homotopie entre f et τ.

En particulier, on obtient $\deg(f) = \deg(\tau) = (-1)^{n+1}$.

(3) Soit $\tau : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$ l'application antipode.

Supposons que $\nexists x \in \mathbb{S}^{2n}$ t.q. $f(x) \in \{x, -x\}$.

Alors, f et $\tau \circ f$ n'ont pas de point fixe.

Par (2), on obtient $\deg(f) = \deg(\tau \circ f) = (-1)^{2n+1} = -1$.

Puisque $\deg(\tau \circ f) = \deg(\tau) \cdot \deg(f)$, cela implique que $\deg(\tau) = 1$, qui contredit le fait que $\deg(\tau) = (-1)^{2n+1} = -1$.

(4) Soit $e \in G$ l'élément neutre. Pour $\forall g \in G$, soit $\phi_g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ l'action associée à g. Alors, $\phi_e = Id_{\mathbb{S}^{2n}}$.

Soit $g \in G \setminus \{e\}$. Puisque l'action de G sur $\mathbb{S}^n$ est libre, ϕ_g n'a pas de point fixe. Donc, par (2), on obtient

$$\deg(\phi_g) = (-1)^{2n+1} = -1.$$

Soit $h \in G \setminus \{e\}$. De même, on a

$$\deg(\phi_h) = -1.$$

Donc, on obtient

$$\deg(\phi_{gh}) = \deg(\phi_g \circ \phi_h) = \deg(\phi_g) \cdot \deg(\phi_h) = 1.$$

Par conséquent, $gh = e$.

Donc, on a montré que pour tout $g, h \in G \setminus \{e\}$, on a $gh = e$.

C'est-à-dire $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(5). Supposons que X est un champ de vecteur continu sur $\mathbb{S}^{2n}$ qui est ne s'annule part. Soit ϕ le flot engendré par X, pour un temps suffisamment petit t.q. $\phi(x) \neq -x$, $\forall x \in S^{2n}$.

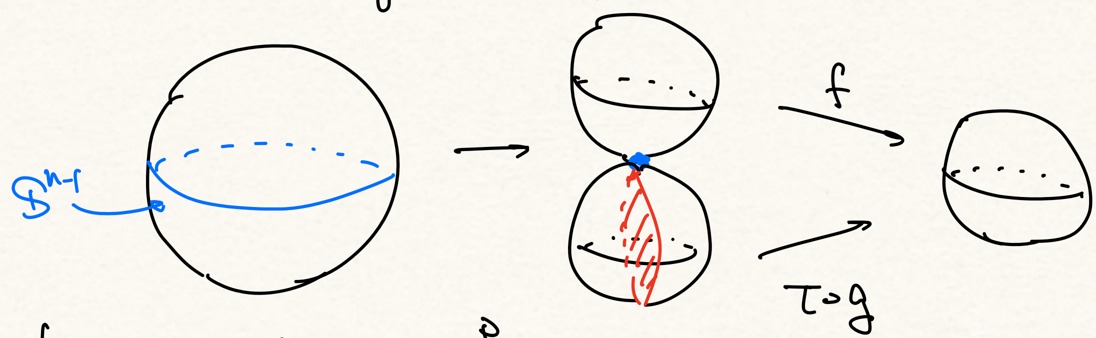
Puisque X ne s'annule part, $\phi(x) \neq x$, $\forall x \in S^{2n}$.

Donc ϕ satisfait $\phi(x) \notin \{x, -x\}$, $\forall x \in S^{2n}$.

Cela contredit (3).

(6). Soit $f, g : (S^n, x_0) \to (S^n, x_0)$ deux éléments dans $\pi_n(S^n, x_0)$.

Alors, l'élément $f - g \in \pi_n(S^n, x_0)$ est représenté par l'application



$$\begin{array}{cccccc} \phi : & S^n & \xrightarrow{p} & S^n / S^{n-1} & & \\ & & & \wr\!\parallel & & \\ & & & S^n \vee S^n & \xrightarrow{(f, \tau \circ g)} & S^n \end{array}$$

où $\alpha : S^n \to S^n$ est la réflexion par rapport au plan rouge.

ϕ induit :

$$\begin{array}{ccccc} \phi_* : H_n(S^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{p_*} & H_n(S^n \vee S^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(f, \alpha \circ g)_*} & H_n(S^n; \mathbb{Z}) \\ \wr\!\parallel & & \wr\!\parallel & & \wr\!\parallel \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{p_*} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{(f_*, \alpha_* \circ g_*)} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Comme dans la preuve du (1), p_* envoie 1 sur $(1, 1)$.

Donc, $\phi_*(1) = f_*(1) + \alpha_* \circ g_*(1)$, et

$$\deg(\phi) = \deg(f) + \deg(\alpha \circ g) = \deg(f) - \deg(g)$$

car $\deg(\alpha) = -1$.

D.

Exercice 4.

(1) L'inclusion $\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{k+1}$ induit une inclusion $\mathbb{R}P^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P^k$.

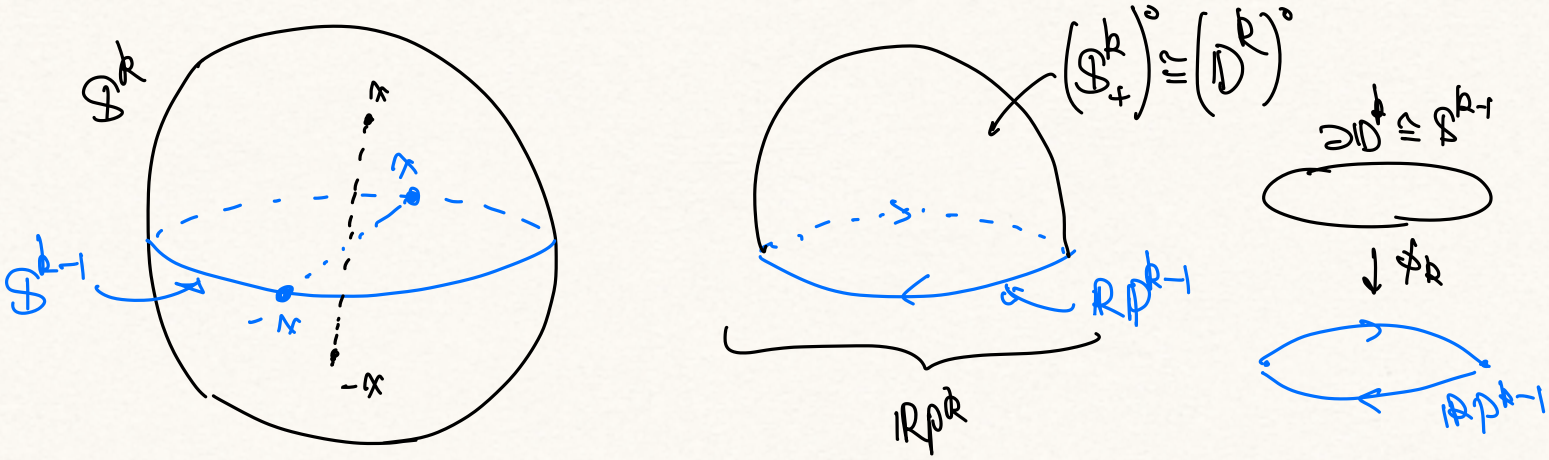
Soit $X_k = \mathbb{R}P^k \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$ $(0 \leq k \leq n)$.

Alors, on a $\{*\} = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n = \mathbb{R}P^n$.

En fait, X_k est le k-skeleton de $\mathbb{R}P^n$.

Si on identifie $\mathbb{R}P^k$ avec $\mathbb{S}^k/\sim$, où $x \sim (-x)$.

Alors, $\mathbb{R}P^{k-1} \cong \mathbb{S}^{k-1}/\sim$, où $\mathbb{S}^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^k$ est l'équateur.



Donc, $\mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1} \cong (\mathbb{S}^k \setminus \mathbb{S}^{k-1})/\sim \;\cong (\mathbb{S}^k_+)^\circ$ l'hémisphère supérieure ouvert

$\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cong (\mathbb{D}^k)^\circ$

$X_k \setminus X_{k-1}$

C'est-à-dire, il existe un seule k-cell e^k, et l'application d'attachement $\phi_k : \partial\mathbb{D}^k \longrightarrow \mathbb{R}P^{k-1}$ est donné par la quotient $\phi_k : \partial\mathbb{D}^k \cong \mathbb{S}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{k-1}$.

De même, $X_{k-1} \setminus X_{k-2}$ a un seule $(k-1)$-cell, et ϕ_k induit

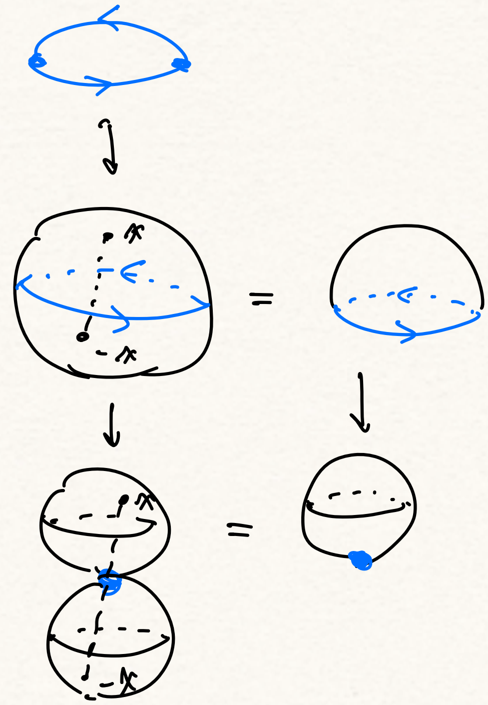
$$\tilde{\phi}_k : \mathbb{S}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} \cong \mathbb{S}^{k-1}$$

où le dernier homéomorphisme est

$$\mathbb{RP}^{k-1}/\mathbb{RP}^{k-2} \cong \left(S^{k-1}/\sim\right)\Big/\left(S^{k-2}/\sim\right) \cong \left(S^{k-1}/S^{k-2}\right)\Big/\sim \;\cong S^{k-1}$$

On a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
S^{k-2} \arrow[r] \arrow[d, hook] & S^{k-2}/\sim \;\cong \mathbb{RP}^{k-2} \arrow[d, hook] \\
S^{k-1} \arrow[r, "\phi_k"] \arrow[d] \arrow[dr, "\tilde{\phi}_k"] & S^{k-1}/\sim \;\cong \mathbb{RP}^{k-1} \arrow[d] \\
S^{k-1}/S^{k-2} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathbb{RP}^{k-1}/\mathbb{RP}^{k-2} \cong S^{k-1} \\
S^{k-1} \vee S^{k-1} \arrow[ur, "{(\mathrm{id},\, \tau)}"'] &
\end{tikzcd}$$



l'application antipode

Donc, $\deg(\tilde{\phi}_k) = \deg(\mathrm{id}) + \deg(\tau) = 1 + (-1)^k$

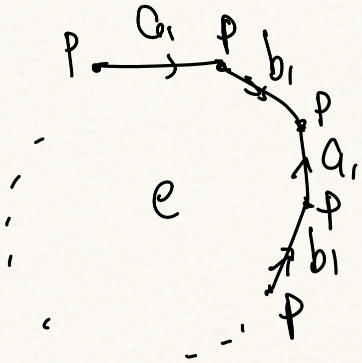
Le complexe de chaînes cellulaires associé est

$$C_k = \mathbb{Z}, \quad d_k = 1 + (-1)^k : C_k \longrightarrow C_{k-1}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
n+1 & & n & & n-1 & & & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{1+(-1)^n} & \mathbb{Z} & & \cdots & & \mathbb{Z} & \xrightarrow[\;2\;]{1+(-1)^2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow[\;0\;]{1+(-1)} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Donc, $H_k(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \text{ or } 2 \nmid k = n. \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & 2 \nmid k,\ 0 < k < n \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$

(2) On considère le polygone fondamentale de la surface S_g de genre g.



Alors, il donne une structure de cplx CW avec

$X_0 = \{p\}$

$X_1 = \{a_i, b_i \mid 1 \leq i \leq g\}$

$X_2 = e.$

Donc, le cplx de chaînes cellulaires associé est

$$C_0 = \mathbb{Z}\langle p\rangle,\ C_1 = \mathbb{Z}^{\oplus 2g} = \oplus \mathbb{Z}\langle a_i\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b_i\rangle,\ C_2 = \mathbb{Z}\langle e\rangle$$

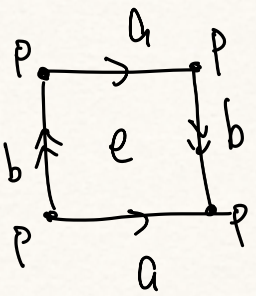
et $d_1 : C_1 \to C_0$ envoie a_i, b_i sur 0

$d_2 : C_2 \to C_0$ envoie e sur $\Sigma(a_i + b_i + (-a_i) + (-b_i)) = 0.$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & C_2 & \xrightarrow{d_2} & C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 & & \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \to & \mathbb{Z}\langle e\rangle & \to & \oplus\mathbb{Z}\langle a_i\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b_i\rangle & \to & \mathbb{Z}\langle p\rangle & \to & 0 \\ & & e & \longmapsto & 0 & & & & \\ & & & & a_i & \longmapsto & 0 & & \\ & & & & b_i & \longmapsto & 0. & & \end{array}$$

Donc, $H_k(S_g; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{\oplus 2g} & k = 1. \end{cases}$

(3) $K \cong$



Donc, $C_0 = \mathbb{Z}\langle p\rangle$

$C_1 = \mathbb{Z}\langle a, b\rangle$

$C_2 = \mathbb{Z}\langle e\rangle$

Et $d_1 : C_1 \to C_0$ envoie a, b sur 0.

$d_2 : C_2 \to C_1$ envoie e sur $a + b + (-a) + b = 2b.$

Donc, le cplx de chaîne associé est

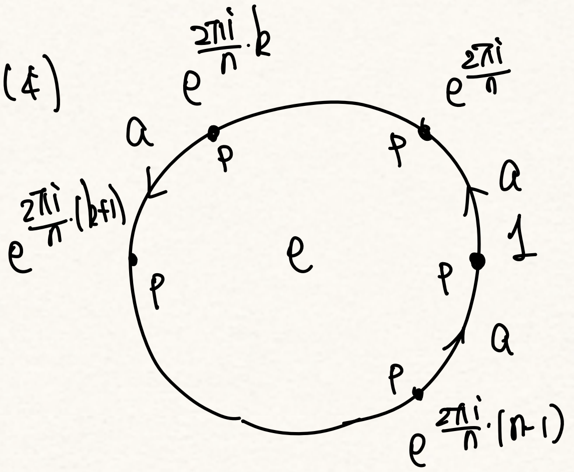
$$\begin{array}{ccccccccc} & & C_2 & & C_1 & & C_0 & & \\ & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}\langle e\rangle & \xrightarrow{d_2} & \mathbb{Z}\langle a,b\rangle & \longrightarrow & \mathbb{Z}\langle p\rangle & \longrightarrow & 0 \\ & & e & \longmapsto & 2b & & & & \\ & & & & a & \longmapsto & 0 & & \\ & & & & b & \longmapsto & 0 & & \end{array}$$

$$H_0(K;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\langle p\rangle \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1(K;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\langle a,b\rangle \big/ \mathbb{Z}\langle 2b\rangle \cong \mathbb{Z}\langle a\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b\rangle \big/ \mathbb{Z}\langle 2b\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$H_2(K;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\langle e\rangle \cong \mathbb{Z}.$$

(4)



$C_0 = \mathbb{Z}\langle p\rangle$

$C_1 = \mathbb{Z}\langle a\rangle$

$C_2 = \mathbb{Z}\langle e\rangle$

$d_1 : C_1 \to C_0$ envoie a sur $p + (-p) = 0$

$d_2 : C_2 \to C_1$ envoie e sur $n \cdot a$

Donc, le cplx associé est :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & C_2 & & C_1 & & C_0 & & \\ & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}\langle e\rangle & \xrightarrow{d_2} & \mathbb{Z}\langle a\rangle & \xrightarrow{d_1} & \mathbb{Z}\langle p\rangle & \longrightarrow & 0 \\ & & e & \longmapsto & n\,a & & & & \\ & & & & a & \longmapsto & 0 & & \end{array}$$

Donc,
$$H_0(X_n;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\langle p\rangle \cong \mathbb{Z}$$
$$H_1(X_n;\mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}\langle a\rangle}{\mathbb{Z}\langle na\rangle} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
$$H_2(X_n;\mathbb{Z}) = 0.$$

(5). Soit X_n comme dans (4), le cplx à coeff. $\mathbb{Q}$ devient

$$\begin{tikzcd}
 & C_2(X_n;\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_1(X_n;\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_0(X_n;\mathbb{Q}) \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Q}\langle e\rangle \arrow[r, "d_2"] & \mathbb{Q}\langle a\rangle \arrow[r, "d_1"] & \mathbb{Q}\langle p\rangle \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
$$e \longmapsto na$$
$$a \longmapsto 0$$

Donc,
$$H_0(X_n;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}\langle p\rangle \cong \mathbb{Q}$$
$$H_1(X_n;\mathbb{Q}) \cong \frac{\mathbb{Q}\langle a\rangle}{\mathbb{Q}\langle na\rangle} = 0 \quad (n \text{ est inversible dans } \mathbb{Q}).$$
$$H_2(X_n;\mathbb{Q}) \cong 0.$$

Mais, $H_1(X_n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \neq 0$ comme dans (4).

(6). Prend $n=2$ dans (4). (en fait, on obtient $X_2 \cong \mathbb{R}P^2$, pour quoi? voir (1)).

Alors, le cplx à coefficient $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ devient

$$\begin{tikzcd}
 & C_2(X_2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & C_1(X_2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & C_0(X_2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "1+(-1)^2"', "0"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$1+(-1)^2 = 2 = 0$$

puisque $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est d'ordre 2

Donc, $H_k(X_2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & k \in \{0,1,2\} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

En particulier, on a $H_2(X_2; \mathbb{Z}) = 0$

mais $H_2(X_2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0.$

$\square$.

Exercice 5.

c) Soit $Y_k := f^{-1}(X_k)$. On montre que on peut prendre Y_k comme le k-skeleton.

Supposons que $X_k \setminus X_{k-1} \cong \coprod_{\alpha \in \Lambda_k} e_k^\alpha$

Puisque e_k^α est contractile, on a

$$f^{-1}(e_k^\alpha) \cong \coprod_{i=1}^{d} {}^i e_k^\alpha$$

est l'union disjointe de d boules ouvertes,

t.q. $f|_{{}^i e_k^\alpha} : {}^i e_k^\alpha \longrightarrow e_k^\alpha$ est un homéomorphisme.

Donc, $Y_k \setminus Y_{k-1} = f^{-1}(X_k \setminus X_{k-1}) = \coprod_\alpha f^{-1}(e_k^\alpha) = \coprod_\alpha \coprod_{i=1}^{d} {}^i e_k^\alpha$

Il reste de trouver les applications d'attachement de ${}^i e_k^\alpha$.

Soit $\phi^\alpha : S^{k-1} \to X_{k-1}$ l'application d'attachement de e_k^α.

Alors, il existe une application

$$\bar{\phi}^\alpha : D^k \longrightarrow X_k$$

t.q. $\begin{cases} \bar{\phi}^\alpha|_{(D^k)^\circ} : (D^k)^\circ \longrightarrow X_k \text{ est un homeomorphisme à} \\ \qquad \text{la } k\text{-cellule } e_k^\alpha \subseteq X_k \setminus X_{k-1}. \\ \bar{\phi}^\alpha|_{\partial D^k} : \partial D^k \cong S^{k-1} \longrightarrow X_k \text{ est égale à } \phi^\alpha. \end{cases}$

On fixe $x \in D^k$, $p := \bar{\phi}^\alpha(x) \in X_k$. Soit $f^{-1}(p) = \{p_i,\ 1 \le i \le d\}$.

Alors, puisque D^k est contractile, pour tout $1 \le i \le d$, il existe un unique relèvement ${}^i\bar{\phi}^\alpha : D^k \to Y_k$ de $\bar{\phi}^\alpha$ t.q.

Puisque, $\overline{\phi_k^\alpha}\big|_{(\mathbb{D}^k)^\circ} : \mathbb{D}_k^\circ \longrightarrow X_k$ est un homéomorphisme à $e_k^\alpha \subseteq X_k \setminus X_{k-1}$,

$\overline{{}^i\phi_k^\alpha}\big|_{(\mathbb{D}^k)^\circ} : \mathbb{D}_k^\circ \longrightarrow Y_k$ est un homéomorphisme à ${}^ie_k^\alpha \subseteq Y_k \setminus Y_{k-1}$.

Par ailleurs, comme $\mathrm{Im}(\overline{\phi_k^\alpha}\big|_{\partial\mathbb{D}^k}) = \mathrm{Im}(\phi^\alpha) \subseteq X_{k-1}$, on a

$$\mathrm{Im}(\overline{{}^i\phi_k^\alpha}\big|_{\partial\mathbb{D}^k}) \subseteq f^{-1}(X_{k-1}) = Y_{k-1}.$$

Donc, $\overline{{}^i\phi_k^\alpha}\big|_{\partial\mathbb{D}^k} : \partial\mathbb{D}^k \cong \mathbb{S}^{k-1} \longrightarrow Y_{k-1}$ est l'application d'attachement de la k-cellule ${}^ie_\alpha^k$.

En conclure, on a construit une structure de CW-cplx de Y t.q. $Y_k = f^{-1}(X_k)$, avec des k-cellules

$$Y_k \setminus Y_{k-1} = \bigsqcup_\alpha \bigsqcup_{i=1}^d {}^ie_k^\alpha.$$

En particulier, $\#\{k\text{-cellules de } Y\} = d \cdot \#\{k\text{-cellules de } X\}$

et donc $\chi(Y) = d \cdot \chi(X)$.

(2) En utilisant la structure de CW-cplx construit dans Exercice 4.(2), on a

$$\chi(S_g) = 1\cdot 1 + (-1)\cdot(2g) + 1\cdot 1 = 2-2g.$$

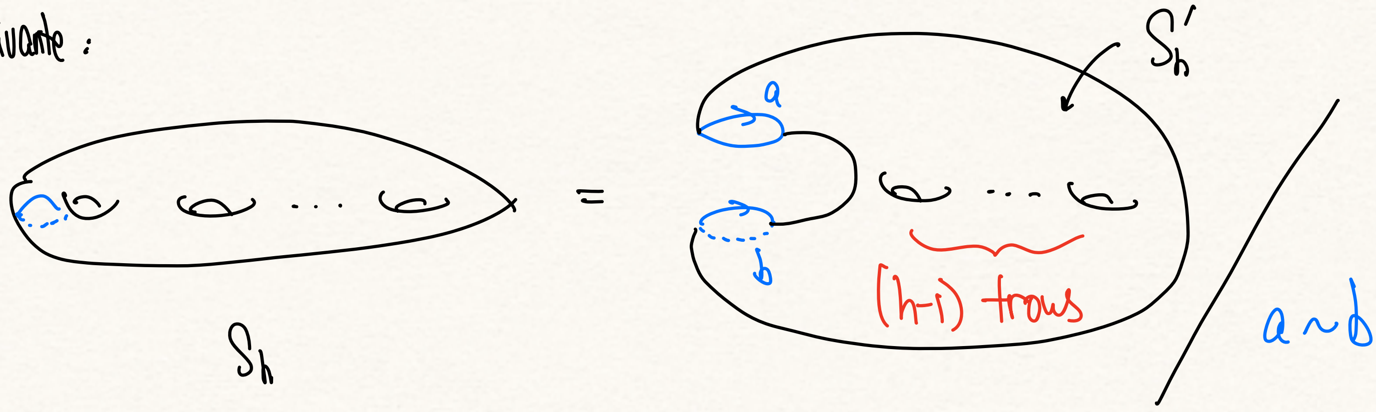
Par (1), s'il existe un revêtement $f : S_g \to S_h$, alors on a

$$2-2h = \chi(S_h) \mid \chi(S_g) = 2-2g$$

i.e., $h-1 \mid g-1$.

En réciproque, si $h-1 \mid g-1$, on peut construire un revêtement $f: S_g \to S_h$.

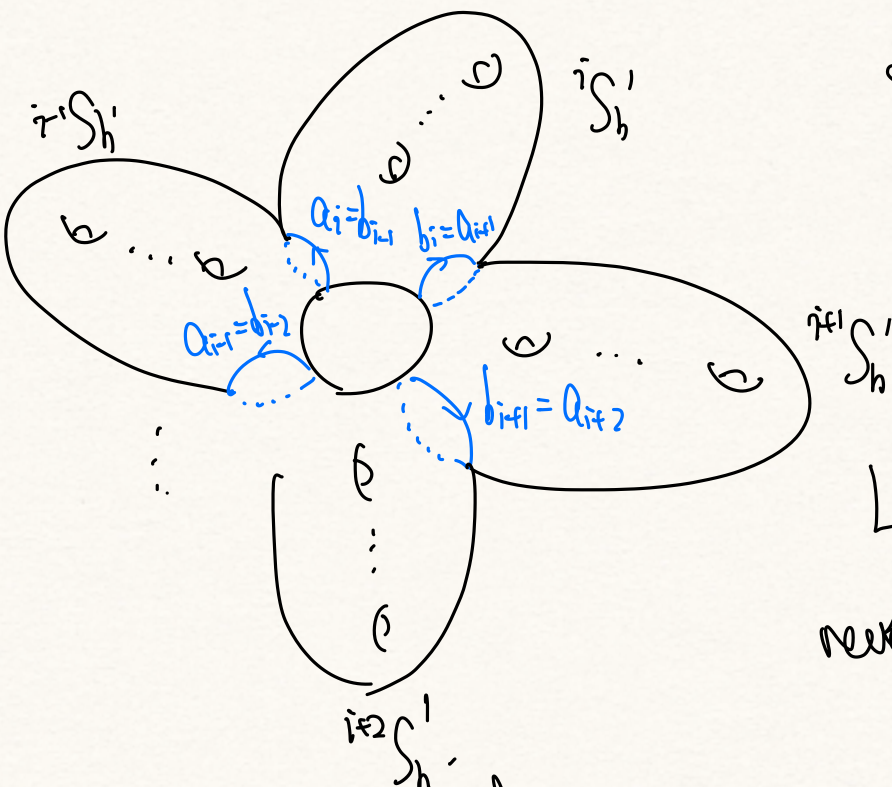
On découpe la surface S_h le long d'un cercle, comme dans la figure suivante :



On prend $d\left(=\frac{g-1}{h-1}\right)$ S_h : ${}^1S_h, \dots, {}^dS_h$

On découpe chaque ${}^iS_h$ comme ${}^iS_h \cong {}^iS_h' / a_i \sim b_i$.

On recolle b_i avec a_{i+1} ($1 \le i \le d$, $a_{d+1} = a_1$). Alors on obtient une surface à $d \cdot (h-1) + 1 = g$ trous, c'est-à-dire S_g.



La construction définit un revêtement $S_g \to S_h$.

(Donc $S_g := \bigsqcup_{i=1}^{d} {}^iS_h' \big/ b_i \sim a_{i+1},\ 1 \le i \le d \longrightarrow S_h' \big/ a \sim b$)

$$\begin{array}{ccc} {}^{i}S_h^1 & \xrightarrow{\cong} & S_h^1 \\ b_i & \longmapsto & b \\ a_i & \longmapsto & a. \end{array}$$

(3). L'identité est un corollaire direct de deux énoncé suivants.

$$\#\{k\text{-cellules de } X = A\cup B\} = \#\{k\text{-cellules de } A\} \cup \#\{k\text{-cellules de } B\}$$

$$\#\{k\text{-cellules de } A\cap B\} = \#\{k\text{-cellules de } A\} \cap \#\{k\text{-cellules de } B\}.$$

(4). Supposons que la structure de CW-cplx de X est donné par

$$\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X$$

t.q. $X_i / X_{i-1} = \bigsqcup_{\alpha\in A_i} e_\alpha^i$

De même, $\emptyset = Y_{-1} \subseteq Y_0 \subseteq \cdots \subseteq Y_m = Y$

t.q. $Y_j / Y_{j-1} = \bigsqcup_{\beta\in B_j} e_\beta^j$.

Soit $(X\times Y)_k := \bigcup_{i+j=k} X_i \times Y_j$.

Alors, on a

$$(X\times Y)_k = \bigcup_{i+j=k} (X_i \setminus X_{i-1}) \times (Y_j \setminus Y_{j-1}) = \bigsqcup_{i+j=k} \bigsqcup_{\substack{\alpha\in A_i \\ \beta\in B_j}} e_\alpha^i \times e_\beta^j.$$

Soit $e^k_{(\alpha,\beta)} := e^i_\alpha \times e^j_\beta$. Il est une boule ouverte de dim $i+j=k$.

Alors, on a $\overline{e^k_{(\alpha,\beta)}} = \overline{e^i_\alpha} \times \overline{e^j_\beta}$

et $\partial \overline{e^k_{(\alpha,\beta)}} = \left(\partial \overline{e^i_\alpha} \times \overline{e^j_\beta}\right) \cup \left(\overline{e^i_\alpha} \times \partial \overline{e^j_\beta}\right)$

Soit $\phi_\alpha : \partial \overline{e^i_\alpha} \to X_{i-1}$ et $\phi_\beta : \partial \overline{e^j_\beta} \to Y_{j-1}$ les applications d'attachement. Soit $i_\alpha : \overline{e^i_\alpha} \hookrightarrow X_i$, $i_\beta : \overline{e^j_\beta} \hookrightarrow Y_j$ les inclusions.

Les deux applications

$$\phi_\alpha \times i_\beta : \partial \overline{e^i_\alpha} \times \overline{e^j_\beta} \longrightarrow X_{i-1} \times Y_j$$

$$\text{et} \quad i_\alpha \times \phi_\beta : \overline{e^i_\alpha} \times \partial \overline{e^j_\beta} \longrightarrow X_i \times Y_{j-1}$$

Coincident sur l'intersection

$$\phi_\alpha \times \phi_\beta : \partial \overline{e^i_\alpha} \times \partial \overline{e^j_\beta} \longrightarrow X_{i-1} \times Y_{j-1}.$$

Donc, ils se recollent en un morphisme

$$\phi_{(\alpha,\beta)} := \partial \overline{e^k_{(\alpha,\beta)}} \longrightarrow \left(X_i \times Y_{j-1}\right) \cup \left(X_{i-1} \times Y_j\right) \subseteq (X \times Y)_{k-1},$$

qui est l'application d'attachement de la k-cellule $e^k_{(\alpha,\beta)}$.

Cela définit une structure de CW-cplx sur $X \times Y$. Et on a

$$\#\{k\text{-cellules de } X \times Y\} = \sum_{i+j=k} \#\{i\text{-cellules de } X\} \times \#\{j\text{-cellules de } Y\}.$$

Il implique que $\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y)$. □

Exercice 6.

(1) On a la suite exacte longue associée à la paire $S^3 \setminus L \subseteq S^3$.

$$\cdots \to H_2(S^3) \to H_2(S^3, S^3\setminus L) \to H_1(S^3\setminus L) \to H_1(S^3) \to \cdots$$

Puisque $H_2(S^3) \cong H_1(S^3) \cong 0$, on a un isomorphisme

$$H_2(S^3, S^3\setminus L) \xrightarrow{\cong} H_1(S^3\setminus L)$$

Soit $p \in (D^2)^\circ$, est $L_i' := \phi_i(S^1 \times \{p\}) \subseteq L_i$, $L' := \bigcup_{i=1}^n L_i'$.

Alors, $S^3 \setminus L'$ se rétracte par déformation sur $S^3 \setminus L$.

Donc,
$$H_2(S^3, S^3\setminus L) \cong H_2(S^3, S^3\setminus L')$$

par excision
$$\cong H_2(S^3\setminus(S^3\setminus L), (S^3\setminus L')\setminus(S^3\setminus L))$$

$$= H_2(L, L\setminus L')$$

$L\setminus L'$ se rétracte par déformation sur ∂L
$$\cong H_2(L, \partial L)$$

(2) Puisque $L = \coprod_{i=1}^n L_i$, $\partial L = \coprod_{i=1}^n \partial L_i$, on a

$$H_2(L, \partial L) \cong \bigoplus_{i=1}^n H_2(L_i, \partial L_i)$$

Pour $\forall i$, on a $(L_i, \partial L_i) \cong (S^1 \times D^2, S^1 \times (\partial D^2) \cong S^1 \times S^1)$

$$H_2(L_i, \partial L_i) \cong H_2(S^1 \times D^2, S^1 \times S^1)$$

On peut le placer dans une suite exacte longue :

$$\cdots \to \underset{\substack{\cong \\ H_2(S^1) \cong 0}}{H_2(S^1 \times D^2)} \to H_2(S^1 \times D^2, S^1 \times S^1) \to H_1(S^1 \times S^1) \xrightarrow{i_*} H_1(S^1 \times D^2) \to \cdots \quad (*)$$

où i est l'inclusion $i : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)$.

Soit $j_1 : \mathbb{S}^1 \times \{*\} \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

$j_2 : \{*\} \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Alors, j_1 induit $(j_1)_* : \underset{\displaystyle \mathbb{Z}}{\underset{\wr\!\shortparallel}{H_1(\mathbb{S}^1 \times \{*\})}} \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$

Soit $e_1 := (j_1)_*(1) \in H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$.

On definit $e_2 := (j_2)_*(1) \in H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$.

Alors, on a $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}\langle e_1, e_2 \rangle$ (voir Exercice 4.(2) avec $g=1$).

Puisque $\mathbb{D}^2$ est contractile, $(i_1)_*$ envoie e_2 sur 0,

envoie e_1 sur un generateur de

$H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2) \cong H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

Comme $H_2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2) \cong H_2(\mathbb{S}^1) \cong 0$ dans $\circledast$, on obtient

$$H_2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \operatorname{Ker}\left(\begin{array}{rcl} i_* : \mathbb{Z}\langle e_1, e_2 \rangle & \longmapsto & \mathbb{Z} \\ e_1 & \longmapsto & 1 \\ e_2 & \longmapsto & 0 \end{array} \right)$$

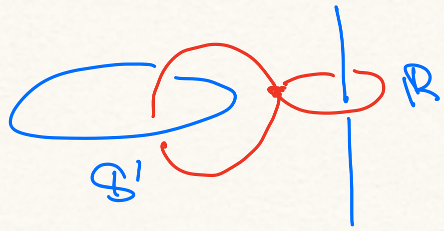
$$\cong \mathbb{Z}\langle e_2 \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Donc, $H_2(L, \partial L; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} H_2(L_i, \partial L_i; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^n$.

(3). Soit $p \in L_0$, alors $\mathbb{S}^3 \setminus L_0 \cong (\mathbb{S}^3 \setminus \{p\}) \setminus (L_0 \setminus \{p\})$.

On a $\mathbb{S}^3 \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^3$, $L_0 \setminus \{p\} \cong \mathbb{R} \cup \mathbb{S}^1$.

Puisque les deux cercles dans L_0 sont Éloignés, $\mathbb{R}$ ne traverse pas l'intérieur du disque bordé par $\mathbb{S}^1$. Voir la figure ci-dessous.



Donc $\mathbb{R}^3 \setminus (L_0 \setminus \{p\})$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ (le bouquet de deux cercles rouges dans la figure).

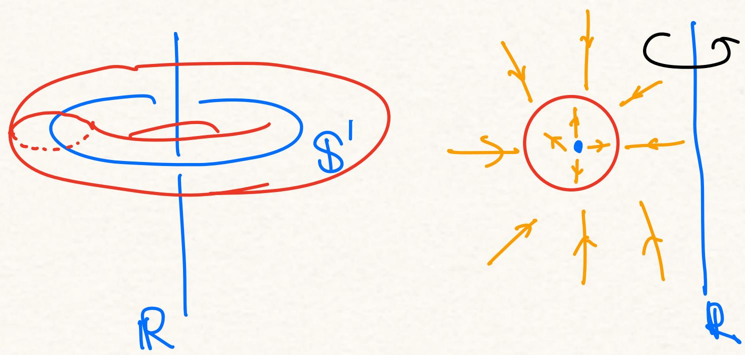
En particulier, on a

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L_0) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \qquad (1)$$

De même, soit $q \in L_1$, on a $\mathbb{S}^3 \setminus L_1 = (\mathbb{S}^3 \setminus \{q\}) \setminus (L_1 \setminus \{q\})$

$\mathbb{S}^3 \setminus \{q\} \cong \mathbb{R}^3$, $\quad L_1 \setminus \{q\} \cong \mathbb{R} \cup \mathbb{S}^1$.

Puisque les deux cercles sont enlacés, $\mathbb{R}$ traverse l'intérieur du disque bordé par $\mathbb{S}^1$. Voir la figure ci-dessus



Donc $\mathbb{R}^3 \setminus (L_1 \setminus \{q\})$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (le tore en rouge).

En particulier, on a

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L_1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \qquad (2)$$

En comparant les equations (1) et (2), on voit que $\mathbb{S}^3 \setminus L_0$ et $\mathbb{S}^3 \setminus L_1$ ne sont pas homotopes.