

TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE - FEUILLE 1 & 2 & 3

Exercice 1: Ecrasement et quotient

Si X est un espace topologique et $A \subset X$ un sous-ensemble, on note X/A l'espace topologique quotient pour la relation

$$x \sim y \iff x, y \in A \text{ ou } x = y.$$

- (1) Montrer que X est séparé si et seulement si sa diagonale $\Delta = \{(x, x), x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$.
- (2) Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X et $\Gamma_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in X \times X, x\mathcal{R}y\}$ son graphe. Montrer que
 - (a) si X/\mathcal{R} est séparé, alors $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est fermé dans $X \times X$.
 - (b) Si $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est fermé dans $X \times X$ et la projection $X \rightarrow X/\mathcal{R}$ est ouverte alors X/\mathcal{R} est séparé.
- (3) On suppose X séparé et A compact. Montrer que X/A est séparé.
- (4) Trouver X séparé et $A \subset X$ tel que X/A ne soit pas séparé.

Exercice 2: Le tore.

On définit \mathbb{T} comme le quotient de $[0, 1]^2$ par la relation qui identifie $(x, 0) \sim (x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, y)$ pour tous $x, y \in [0, 1]$. Montrer que \mathbb{T} est homéomorphe aux espaces suivants:

- (1) le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
- (2) le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, où \mathbb{Z}^2 agit sur \mathbb{R}^2 par translations.
- (3) le tore de révolution, i.e le sous-espace de \mathbb{R}^3 défini en coordonnées par

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 = 8(x^2 + y^2).$$

Exercice 3: Bouquet d'espaces.

Pour $(X_i, x_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés, on note $\bigvee_{i \in I} X_i$ l'espace, appelé bouquet des X_i , obtenu à partir de l'union disjointe des X_i en identifiant tous les points x_i entre eux.

- (1) Soit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. On peut voir \mathbb{S}^{n-1} comme un sous-espace de \mathbb{S}^n (son équateur) par l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$. Montrer que $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ est homéomorphe à un bouquet de deux sphères de dimension n .
- (2) La boucle hawaïenne est le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 défini comme la réunion des cercles de centre $(\frac{1}{n}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{n}$. Montrer que H n'est pas homéomorphe au bouquet d'une famille de cercles.

Exercice 4: Exemples d'homotopies.

Soit X un espace topologique.

- (1) Montrer que si deux applications continues $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sont telles que pour tout $x \in X$ on ait $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$ (en norme euclidienne), alors f et g sont homotopes.
- (2) Soit $n \geq 1$. Montrer que toute application continue non-surjective $X \rightarrow \mathbb{S}^n$ est homotope à une application constante.
- (3) Soit $n \geq 1$. Montrer que si deux applications continues $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ sont telles que pour tout $x \in X$ on ait $|f(x) - g(x)| < 2$, alors f et g sont homotopes. En déduire qu'une application continue sans point fixe : $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ est homotope à l'application antipodale $x \mapsto -x$.

Exercice 5: Cône d'un espace.

Soit X un espace topologique: on pose $CX = X \times [0, 1]/X \times \{0\}$. On notera \star la classe d'équivalence de $X \times \{0\}$ (le sommet du cône) et on identifiera X à un sous-ensemble de CX par le plongement $x \mapsto (x, 1)$.

- (1) Montrer que CX est contractile.
- (2) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Montrer que f est homotope à une application constante si et seulement si il existe une application continue $F : CX \rightarrow Y$ qui prolonge f .
- (3) Montrer que $\mathbb{C}\mathbb{S}^n$ est homéomorphe à \mathbb{D}^{n+1} .
- (4) Est-il vrai que si X est une variété topologique, alors $CX \setminus X$ aussi?

Exercice 6: Ruban de Möbius.

On considère l'action de \mathbb{Z} sur \mathbb{R}^2 définie par $n.(x, y) = (x + n, (-1)^n y)$.

- (1) Montrer que le quotient $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ est une variété topologique.
- (2) Montrer que M s'identifie au quotient de $[0, 1] \times]0, 1[$ par la relation engendrée par $(0, t) \sim (1, 1 - t)$.
- (3) Montrer que M est homotopiquement équivalent à \mathbb{S}^1 .

Exercice 7: Cylindre d'une application.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. On définit $M_f = X \times [0, 1] \amalg Y / \sim$ où on a posé $(x, 1) \sim f(x)$ pour tout $x, x' \in X$.

- (1) Montrer que $i : X \rightarrow M_f$ et $j : Y \rightarrow M_f$ définies respectivement par $i(x) = (x, 0)$ et $j(y) = y$ sont des plongements.
- (2) Montrer que M_f se rétracte par déformation sur Y .
- (3) Montrer qu'une homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ entre f et g induit une application $\tilde{H} : M_f \rightarrow Y$ prolongeant g .
- (4) Montrer que f et g sont homotopes si et seulement si M_f et M_g sont homotopiquement équivalents relativement à X .
- (5) Montrer que si X et Y sont deux CW-complexes alors M_f aussi et décrire ses cellules.

Exercice 8: Type d'homotopie d'un complémentaire.

- (1) Soit E un sous-espace vectoriel de dimension k de \mathbb{R}^n , avec $k < n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus E$ a le même type d'homotopie que \mathbb{S}^{n-k-1} .
- (2) Soit C un sous-ensemble convexe borné de \mathbb{R}^n . Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus C$ a le même type d'homotopie que \mathbb{S}^{n-1} . Indice : commencer par se ramener au cas où C est un convexe contenant 0 et contenu dans une boule de centre 0 et de rayon 1/2.
- (3) Soit X un espace topologique, et soient A et B deux sous-espaces non vides de X . Montrer que l'on peut avoir A et B homotopiquement équivalents, sans que $X \setminus A$ et $X \setminus B$ soient homotopiquement équivalents.
- (4) Montrer que le tore privé d'un point a le type d'homotopie d'un bouquet de deux cercles.

Exercice 9: Rétractions.

- (1) Soit $P = (-1, 0)$ et $Q = (1, 0)$ deux points de \mathbb{R}^2 . Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$ se rétracte par déformation forte sur la réunion de deux cercles de rayon 1 centrés en P et Q .
- (2) Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ se rétracte par déformation sur $\text{O}_n(\mathbb{R})$.
- (3) Notons $P \subset \mathbb{R}^2$ le peigne défini par

$$X = \{0\} \times [0, 1] \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \right) \cup [0, 1] \times \{0\}, \quad A = [0, 1] \times \{0\} \subset X.$$

Montrer que X se rétracte par déformation sur A .

- (4) Identifier les points de P qui sont respectivement des retracts, des retracts par déformation, des retracts par déformation forte de P .

Exercice 10: Familles de CW-complexes

- (1) Construire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une structure de CW-complexe sur \mathbb{S}^n de sorte que \mathbb{S}^{n-1} soit un sous-complexe de \mathbb{S}^n via l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$.
- (2) Faire de même avec la famille des tores $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ muni de l'inclusion $\mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^{n+1}$ définie par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 1)$.
- (3) Faire de même avec les espaces projectifs réels et l'inclusion $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ définie en coordonnées homogènes par $[x_0, \dots, x_n] \mapsto [x_0, \dots, x_n, 0]$.

Exercice 11: Propriétés des CW-complexes

Soit X un CW-complexe et C une cellule de dimension n dont l'application caractéristique associée est $f : \mathbb{D}^n \rightarrow X$. En particulier, C est l'image par f de l'intérieur de \mathbb{D}^n .

- (1) Montrer que l'adhérence de C dans X est égale à $f(\mathbb{D}^n)$.
- (2) Montrer que X est normal, en particulier séparé.
- (3) Montrer que X est compact ssi il est fini.
- (4) Montrer que X est connexe ssi X^1 l'est.
- (5) Montrer que pour tout $k \geq 1$, X^k/X^{k-1} est soit un point, soit homéomorphe à un bouquet de sphères de dimension k .
- (6) Montrer que tout compact $K \subset X$ est inclus dans un CW-complexe fini.
Indication: raisonner par l'absurde en définissant un sous-ensemble $S \subset K$ contenant un point par cellule et montrer que S est discret.

Exercice 12: Extension des homotopies.

Soit (X, A) une paire de CW-complexes.

- (1) Montrer qu'il existe une rétraction par déformation de $\mathbb{D}^n \times [0, 1]$ sur $\mathbb{D}^n \times \{0\} \cup \partial\mathbb{D}^n \times [0, 1]$.
- (2) En déduire qu'il existe une rétraction par déformation de $X^n \times [0, 1]$ sur $X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times [0, 1]$.
- (3) En déduire qu'il existe une rétraction par déformation de $X \times [0, 1]$ sur $X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$.
- (4) Montrer la propriété d'extension des homotopies: étant donné $f : X \rightarrow Y$ et une homotopie $f_t : A \rightarrow Y$, on peut étendre la famille f_t à X entier.
- (5) Montrer enfin que si A est contractile, l'application quotient $X \rightarrow X/A$ est une équivalence d'homotopie.
- (6) Prouver que tout CW-complexe connexe de dimension 1 est homotope à un bouquet de cercles.

Exercice 13: CW complexes produits

Soient X, Y deux CW-complexes.

- (1) Est-ce que le produit cartésien $X \times Y$ muni de la topologie produit est toujours un CW-complexe?
- (2) Que se passe-t-il si X et Y sont localement compacts?
- (3) Et si X ou Y est localement fini?

Exercice 14: Voisinage des sous-complexes.

Soit X un CW-complexe et $0 < \epsilon < 1$. Construire pour tout sous-complexe $A \subset X$ un voisinage ouvert $N_\epsilon(A)$ de A tel que

- (1) L'ouvert $N_\epsilon(A)$ se rétracte par déformation sur A .
- (2) Pour tous sous-complexes $A, B \subset X$ on a $N_\epsilon(A) \cap N_\epsilon(B) = N_\epsilon(A \cap B)$.

Exercice 15: Composantes connexes par arcs des espaces fonctionnels

Soient X et Y des espaces topologiques avec X localement compact. On note $C(X, Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y , muni de la topologie compacte-ouverte.

- (1) Montrer que deux fonctions f, g sont dans la même composante connexe par arcs de l'espace $C(X, Y)$ si et seulement si elles sont homotopes.
- (2) Soit $x \in X$ et $\Omega X \subset C([0, 1], X)$ le sous-ensemble défini par

$$\Omega X = \{f : [0, 1] \rightarrow X, f(0) = f(1) = x\}.$$

On note c_x le lacet constant égal à x : montrer l'isomorphisme $\pi_2(X, x) = \pi_1(\Omega X, c_x)$.

Exercice 16: Point base et groupe d'homotopie d'un produit

- (1) On suppose que X est connexe par arcs. Soient x_0 et x_1 des points de X . Montrer que les groupes $\pi_k(X, x_0)$ et $\pi_k(X, x_1)$ sont isomorphes pour tous $k \geq 0$.

- (2) Soient (X, x_0) et (Y, y_0) des espaces topologiques pointés, et soit $k \geq 1$ un nombre entier. Montrer que

$$\pi_k(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_k(X, x_0) \times \pi_k(Y, y_0).$$

Exercice 17: Groupe fondamental de \mathbb{S}^n pour $n \geq 2$.

Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$ un chemin continu avec $n \geq 2$.

- (1) Montrer qu'il existe $k \geq 1$ et une subdivision $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k = 1$ tel que pour tout $0 \leq i < k$, la restriction de α à $[a_i, a_{i+1}]$ est homotope à un chemin nulle part dense.
- (2) En déduire que tout lacet α est homotope au lacet constant, puis que $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$.

Exercice 18: Principe de Eckmann-Hilton

Soit X un ensemble. On suppose que X est équipé de deux produits, c'est-à-dire de deux applications $\star : X \times X \rightarrow X$ et $\circ : X \times X \rightarrow X$ vérifiant les conditions suivantes :

- (i) Chaque loi admet une unité 1_\star et 1_\circ , respectivement.
- (ii) L'application \star est compatible avec l'opération \circ , c'est-à-dire :

$$(x \circ x') \star (y \circ y') = (x \star y) \circ (x' \star y').$$

- (1) Montrer que les deux applications produits sont égales, et qu'elles définissent une structure de monoïde commutatif sur X .
- (2) Montrer que le groupe fondamental d'un groupe topologique est abélien. (On rappelle qu'un groupe topologique est un espace topologique muni d'une loi de groupe pour laquelle la multiplication et le passage à l'inverse sont continus).
- (3) En déduire que pour toute paire (X, x) , le groupe $\pi_2(X, x)$ est abélien.

Exercice 19: Classes d'homotopie libres

Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs, et soit x un point de X . On appelle lacet libre dans X une application continue $f : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $f(0) = f(1)$. Deux lacets libres f_0 et f_1 sont dits librement homotopes s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que, pour tout $t \in [0, 1]$, on ait

$$H(t, 0) = f_0(t), H(t, 1) = f_1(t), H(0, t) = H(1, t).$$

Montrer que l'ensemble des classes d'homotopie libre est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(X, x)$.

Exercice 20: Somme connexe

Soit $n \geq 1$ et X_n l'ensemble des variétés topologiques compactes et connexes à homéomorphisme près.

- (1) Montrer que l'opération de somme connexe munit X_n d'une structure de monoïde commutatif. Quel est son élément neutre?
- (2) Etablir la formule $\mathbb{T} \# \mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ dans X_2 où \mathbb{T} désigne le tore et $\mathbb{R}P^2$ le plan projectif.
- (3) Montrer que pour tout $M, N \in X_n$ on a $M \# N = \mathbb{S}^n \implies M = N = \mathbb{S}^n$ en admettant le théorème de Jordan-Brouwer.

Théorème de Jordan-Brouwer: pour tout $n \geq 1$ et tout plongement $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$, le complémentaire $\mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ a deux composantes connexes dont l'adhérence est homéomorphe à une boule \mathbb{D}^n .