Arbres et amalgames

Chuhao Huang et Yuxiao Xie

20 juin 2022

Table des matières

En suivant le livre [Serre, 1977], nous étudions les actions de groupes sur les arbres, qui fournissent des informations sur la structure du groupe en question. Dans la première section, nous définissons ce qu'est un arbre et comment un groupe peut opérer sur un arbre. Nous définissons également l'amalgame de groupes. Nous arrivons ensuite au théorème central, le théorème 2.3, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe puisse être écrit comme un amalgame. Pour terminer la section 2, nous montrons que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ ne peut pas être un amalgame. Enfin, dans la dernière section, nous appliquons le théorème 2.3 à un type particulier de sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(K)$ et montrons qu'ils ont la forme d'amalgames. En particulier, nous montrons que $\mathrm{SL}_2(K) = \mathrm{SL}_2(O) *_\Gamma \mathrm{SL}_2(O)$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) *_\Gamma \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ à la fin de l'article.

1 Généralités

1.1 Graphes

Définition 1.1. Un **graphe (non orienté)** Γ est la donnée d'un ensemble V de **sommets**, d'un ensemble E d'**arêtes**, et d'une **application d'incidence** $\mathrm{ad} : E \to 2^V$ telle que $\#\mathrm{ad}(e) = 1$ ou 2 pour tout $e \in E$.

Les éléments de $\mathrm{ad}(e)$ s'appellent les **extrémités** de l'arête e. Une **boucle** est une arête qui n'a qu'une seule extrémité.

Exemple 1.2. Le **droit chemin** est le graphe P_∞ dont :
- $V = \mathbb{Z}$;
- $E = \{[i, i+1] : i \in \mathbb{Z}\}$;
- $\mathrm{ad} : [a, b] \mapsto \{a, b\}$, $\forall\, a, b \in V$.

Exemple 1.3. Le **chemin de longueur** n ($n \geq 0$) est le graphe P_n dont :
- $V = \{0, 1, \ldots, n\}$;
- $E = \{[0, 1], [1, 2], \ldots, [n-1, n]\}$ ($E = \varnothing$ si $n = 0$) ;
- $\mathrm{ad} : [a, b] \mapsto \{a, b\}$, $\forall\, a, b \in V$.

Exemple 1.4. Le **circuit de longueur** n ($n \geq 1$) est le graphe C_n dont :
- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$;
- $E = \{[1, 2], [2, 3], \ldots, [n-1, n], [n, 1]\}$ ($E = \{[1, 1]\}$ si $n = 1$) ;
- $\mathrm{ad} : [a, b] \mapsto \{a, b\}$, $\forall\, a, b \in V$.

Définition 1.5. Un **morphisme (de graphes)** φ d'un graphe $\Gamma_1 = (V_1, E_1, \mathrm{ad}_1)$ dans un graphe $\Gamma_2 = (V_2, E_2, \mathrm{ad}_2)$ est la donnée de deux applications $\varphi_V : V_1 \to V_2$ et $\varphi_E : E_1 \to E_2$ qui sont $(\mathrm{ad}_1, \mathrm{ad}_2)$-équivariantes, c'est-à-dire que $\varphi_V(\mathrm{ad}_1(e)) = \mathrm{ad}_2(\varphi_E(e))$ pour tout $e \in E_1$,

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\varphi_E"] \arrow[d, "\mathrm{ad}_1"'] & E_2 \arrow[d, "\mathrm{ad}_2"] \\ 2^{V_1} \arrow[r, "\varphi_V"] & 2^{V_2} \end{tikzcd}$$

Dans la suite, on omet les indices et écrit simplement φ pour φ_V et φ_E.

Évidemment, les graphes et ses morphismes constituent une catégorie.

Définition 1.6. Un morphisme est dit **injectif** ou **surjectif** s'il l'est sur les sommets et sur les arêtes. Un **sous-graphe** est l'image d'un morphisme injectif.

On peut parler d'intersections et de réunions de sous-graphes.

Définition 1.7. La **réalisation topologique** d'un graphe $\Gamma = (V, E, \mathrm{ad})$ est l'espace topologique $(V \sqcup (E \times [0,1]))/\sim_{\mathrm{ad}}$ où V et E sont munis de la topologie discrète et $\sim_{\mathrm{ad}}$ identifie $\{e\} \times \{0,1\}$ avec $\mathrm{ad}(e)$ pour tout $e \in E$. (Lorsque $\#\mathrm{ad}(e) = 2$, il y a deux identifications possibles, mais le choix n'a pas d'importance.)

Cette construction définit naturellement un foncteur de la sous-catégorie complète des graphes sans boucles dans la catégorie des espaces topologiques. Il n'est pas bien défini sur toute la catégorie à cause de l'ambiguïté de l'orientation des boucles.

Remarque 1.8. Les réalisations topologiques de graphes sont exactement ce qu'on appelle les CW-complexes de dimension 1, et les sous-graphes correspondent aux sous-complexes.

Définition 1.9. Soient Γ un graphe et p, q deux sommets de Γ. Un **chemin de longueur** n de p à q dans Γ est un morphisme $\varphi : P_n \to \Gamma$ (pas forcément injectif) tel que $\varphi(0) = p$, $\varphi(n) = q$. La **distance** entre p et q est la longueur minimale de tels chemins et est notée $d(p,q)$. Le graphe Γ est dit **connexe** s'il existe un chemin entre tous deux sommets.

Un graphe est connexe si et seulement si sa réalisation topologique l'est.

Définition 1.10. Soient Γ un graphe, p, q, r trois sommets de Γ, $\varphi_1 : P_{n_1} \to \Gamma$ un chemin de p à q, et $\varphi_2 : P_{n_2} \to \Gamma$ un chemin de q à r. La **concaténation** de φ_1 et φ_2 est le chemin $\varphi_1 \vee \varphi_2 : P_{n_1+n_2} \to \Gamma$ de p à r défini de façon évidente.

Ceci montre que la distance est une métrique sur l'ensemble de sommets d'un graphe connexe. En fait, elle étend naturellement en une métrique sur la réalisation topologique qui induit la bonne topologie.

1.2 Arbres

Définition 1.11. Un **arbre** est un graphe connexe sans circuits, c'est-à-dire qu'il n'a pas de sous-graphe isomorphe à un circuit.

Il n'est pas difficile de voir qu'un graphe est un arbre si et seulement si sa réalisation topologique est contractile.

Proposition 1.12. *Soient T un arbre et p, q deux sommets de T. Alors un chemin de p à q dans T est injectif si et seulement s'il est de longueur $d(p,q)$. Un tel chemin existe et est unique, et son image est l'intersection des images de tous les chemin de p à q. On l'appelle la* ***géodésique*** *de p à q et on la note $[p,q]$.*

Preuve. Si l'on a deux chemins injectifs de p à q, alors on peut en fabriquer un circuit en regardant leur "différence", ce qui montre l'unicité. Par définition, il existe un chemin P de p à q de longueur $d(p,q)$. Un tel chemin est forcément injectif sur les sommets et donc injectif, car sinon on peut le remplacer par un chemin plus court en en supprimant une partie. Inversement, tout chemin de p à q devient un chemin injectif en supprimant les arêtes "redondantes", et un tel chemin coïncide avec P par unicité. $\square$

Proposition 1.13. *Soient T un arbre et Γ_1, Γ_2 deux sous-arbres disjoints de T. Alors il existe un sommet p de Γ_1 et un sommet q de Γ_2 tels que si p' est un sommet de Γ_1 et q' un sommet de Γ_2, alors $[p', q'] = [p', p] \vee [p, q] \vee [q, q']$. En particulier, $[p, q]$ est le chemin le plus court de Γ_1 à Γ_2. On l'appelle la* ***géodésique*** *de Γ_1 à Γ_2 et on la note $[\Gamma_1, \Gamma_2]$.*

Preuve. Choisissons p, q tels que $d(p,q)$ soit minimale. Si le chemin $[p,q]$ croise Γ_1 en un point autre que p, alors on a un chemin plus court de Γ_1 à Γ_2. De même pour Γ_2. Donc $[p', p] \vee [p, q] \vee [q, q']$ est injectif. $\square$

On aura besoin de deux propositions techniques :

Proposition 1.14. *Tout graphe a un sous-arbre maximal, c'est-à-dire qu'il n'est pas contenu dans un sous-arbre strictement plus grand.*

Proposition 1.15. *Soit $\varphi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ un morphisme surjectif de graphes connexes. Alors tout sous-arbre de Γ_2 a un relèvement, c'est-à-dire un sous-arbre de Γ_1 tel que $\varphi|_{\Gamma_1}$ soit un isomorphisme $\Gamma_1 \to \Gamma_2$.*

Esquisse des preuves. Le cas des graphes finis se fait par récurrence. Pour le cas général, on applique le lemme de Zorn : par la finitude des circuits, la réunion d'un ensemble de sous-arbres totalement ordonné par inclusion est aussi un arbre. $\square$

1.3 Actions

Définition 1.16. Un automorphisme φ d'un graphe est dit **sans inversion** s'il n'existe pas d'arête e telle que $\varphi(e) = e$ et $\varphi|_{\mathrm{ad}(e)} \neq \mathrm{id}$.

Une telle arête peut s'avérer problématique en partie car son milieu (dans la réalisation topologique) est un point fixe de φ. Sauf mention contraire, on suppose que tous les automorphismes dans ce mémoire soient sans inversion. Il est à noter que les automorphismes sans inversion ne forment *pas* forcément un groupe.

Définition 1.17. Une **action (à gauche)** Φ d'un groupe G sur un graphe $\Gamma = (V, E, \mathrm{ad})$ est la donnée de deux applications $G \times V \to V$ et $G \times E \to E$ qui induisent un homomorphisme de groupes $G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$. On dit que G **opère** sur Γ et on note simplement $gx = g \cdot x = \Phi(g, x)$ pour $g \in G$ et $x \in V$ ou E.

Le **sous-graphe fixé** Γ^G se compose des sommets et des arêtes fixés par G.

Le **graphe quotient** $G \backslash \Gamma$ a pour sommets l'ensemble $G \backslash V$ des orbites de G sur V et pour arêtes l'ensemble $G \backslash E$ des orbites de G sur E. Son application d'incidence est définie de façon évidente.

Pour un graphe sans boucles, ces notions correspondent aux notions topologiques au moyen de la réalisation topologique.

Exemple 1.18. Le groupe $\mathbb{Z}$ opère sur P_∞ par translations : $n \cdot i = n + i$, $n \cdot [i, i+1] = [n+i, n+i+1]$, $\forall\, i \in \mathbb{Z}$. Le graphe quotient de cette action est C_1.

Exemple 1.19. Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ opère sur C_n aussi par translations (modulo n) et le graphe quotient est aussi C_1.

1.4 Amalgames

Définition 1.20. Soient $\iota_1 : A \to G_1$ et $\iota_2 : A \to G_2$ deux homomorphismes injectifs de groupes. L'**amalgame** de (ι_1, ι_2) est la donnée d'un groupe $G_1 *_A G_2$ et de deux homomorphismes $\alpha_1 : G_1 \to G_1 *_A G_2$ et $\alpha_2 : G_2 \to G_1 *_A G_2$ tels que $\alpha_1 \circ \iota_1 = \alpha_2 \circ \iota_2$ et que si on a un groupe G et deux homomorphismes $\beta_1 : G_1 \to G$ et $\beta_2 : G_2 \to G$ tels que $\beta_1 \circ \iota_1 = \beta_2 \circ \iota_2$, alors il existe un unique homomorphisme $\gamma : G_1 *_A G_2 \to G$ tel que $\beta_1 = \gamma \circ \alpha_1$ et $\beta_2 = \gamma \circ \alpha_2$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[d, "\iota_1"'] & G_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \arrow[ddr, bend left, "\beta_2"] & \\
G_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[drr, bend right, "\beta_1"'] & G_1 *_A G_2 \arrow[dr, dashed, "\gamma"] & \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

L'amalgame est dit **trivial** si ι_1 ou ι_2 est un isomorphisme. Par abus de dénomination, on appelle le groupe $G_1 *_A G_2$ l'amalgame.

Il n'est pas difficile de montrer que l'amalgame existe et est unique à unique isomorphisme près. De plus, α_1 et α_2 sont forcément injectifs, donc on peut identifier A, G_1, G_2 comme sous-groupes de l'amalgame. L'amalgame est trivial si et seulement si $G = G_1$ ou G_2.

Théorème 1.21. *Soient $S_1 \subset G$ un ensemble de représentants pour l'ensemble G/G_1 des classes à droite de G suivant G_1, et S_2 pour G/G_2. Alors chaque élément de $G_1 *_A G_2$ a une unique décomposition de la forme $as_1s_2 \cdots s_n$ où $n \in \mathbb{N}$, $a \in A$, $s_i \in S_{j_i} \setminus G_{j_i}$, $j_i \in \{1, 2\}$, $j_i \neq j_{i+1}$ pour tout i.*

Pour la preuve, voir [Serre, 1977, §1.2].

Corollaire 1.22. *Si* $g_1g_2\cdots g_n = 1$ *où* $n \in \mathbb{N}^+$, $g_i \in G_{j_i}$, $j_i \in \{1,2\}$, $j_i \neq j_{i+1}$ *pour tout* i, *alors* $g_i \in A$ *pour tout* i.

2 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ n'est pas un amalgame

Le but de cette section est de montrer le résultat suivant :

Théorème 2.1. $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ *n'est pas un amalgame non trivial.*

2.1 Actions et amalgames

Définition 2.2. Soit $\Gamma = (V, E, \mathrm{ad})$ un graphe. Un **pivot** de Γ est un sommet $p \in V$ tel que $\{p, q\} \in \mathrm{im}\,\mathrm{ad}$ pour tout $q \in V \setminus \{p\}$.

Théorème 2.3. *Un groupe est un amalgame non trivial si et seulement s'il opère sur un arbre sans pivot tel que le graphe quotient soit isomorphe à* P_1.

Preuve de "⇒". Pour $G = G_1 *_A G_2$, considérons le graphe dont

— $V = G/G_1 \sqcup G/G_2$;

— $E = G/A$;

— $\mathrm{ad} : xA \mapsto \{xG_1, xG_2\}$ pour tout $x \in G$.

Ce graphe est un arbre par le corollaire 1.22. Le groupe G opère sur cet arbre par multiplication à gauche. Le graphe quotient est relevé par $(\{G_1, G_2\}, \{A\}, \mathrm{ad})$ qui est isomorphe à P_1. Ce graphe a un pivot si et seulement si $G = G_1$ ou G_2. □

On énonce l'inverse plus précisément comme suit :

Proposition 2.4. *Soient* T *un graphe et* G *un groupe qui opère sur* T. *Supposons que* $G\backslash T$ *soit isomorphe à* P_1. *Soit* $P = (\{p, q\}, \{e\}, \mathrm{ad})$ *un relèvement de* $G\backslash T$. *On a naturellement un homomorphisme* $\psi : G_p *_{G_e} G_q \to G$, *où* G_x *désigne le stabiliseur de* x *dans* G. *Alors :*

(1) ψ *est surjectif si et seulement si* T *est connexe.*

(2) ψ *est injectif si et seulement si* T *n'a pas de circuit.*

En particulier, si T *est un arbre, alors* G *est un amalgame, et cet amalgame est trivial si et seulement si* T *a un pivot.*

Preuve. (1) : Soient T_0 la composante connexe de T contenant P, G_0 le sous-groupe de G engendré par $G_p \cup G_q$, et $G_0' = \{g \in G : gT_0 \subset T_0\}$. Évidemment, G_0' est un groupe. Pour $g \in G_p \cup G_q$, on a $gP \cap P \neq \varnothing$, donc $G_0 \subset G_0'$, $G_0P \subset T_0$. Pour $g \in G$, si $P \cap gP \neq \varnothing$, alors $\{p, q\} \cap \{gp, gq\} \neq \varnothing$. Par l'hypothèse, p et q

ne sont pas dans la même orbite, donc soit $gp = p$, soit $gq = q$, c'est-à-dire que $g \in G_p \cup G_q$. Ceci montre que $G_0 P \cup (G \setminus G_0)P = \varnothing$. Par conséquent, $G_0 P = T_0$. Le graphe T est connexe si et seulement si $T = T_0$, si et seulement si $(G \setminus G_0)P = \varnothing$, c'est-à-dire que $G = G_0$.

(2) : Clairement, T n'a pas de boucle. Soit $\varphi : C_n \to T$ un morphisme injectif, alors $n \neq 2$. Pour tout i, soit $h_i \in G$ tel que $h_i e = \varphi([i, i+1])$ (l'indice est modulo n), alors $h_i h_{i-1}^{-1} \in G_{\varphi(i)}$, $h_{i-1}^{-1} h_i = h_{i-1}^{-1}(h_i h_{i-1}^{-1})h_{i-1} \in G_{h_{i-1}^{-1}(\varphi(i))}$, $h_{i-1}^{-1}(\varphi(i)) \in \{p, q\}$, $h_{i-1}^{-1}(\varphi(i)) \neq h_i^{-1}(\varphi(i+1))$, et on a $(h_1^{-1}h_2)(h_2^{-1}h_3)\cdots(h_n^{-1}h_1) = 1$. Si ψ est injectif, alors par le corollaire 1.22, $h_{i-1}^{-1}h_i \in G_e$ pour tout i, donc φ n'est pas injectif sur les arêtes. Inversement, si ψ n'est pas injectif, alors il existe un produit $g_1 g_2 \dots g_n = 1$ comme dans le corollaire 1.22 tel que $g_i \notin G_e$ pour tout i. On peut supposer n minimal, alors le morphisme $\varphi : C_n \to T$ défini par $\varphi([i, i+1]) = g_1 \cdots g_i e$ est injectif.

Pour le dernier énoncé, on note qu'un sommet r est un pivot si et seulement si $G_r = G$. $\square$

Exemple 2.5. $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ opère sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ par des transformations de Möbius :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Soit y l'arc de $P = e^{i\pi/3}$ à $Q = i$ du cercle centré à 0. On peut montrer que l'orbite de y forme naturellement la réalisation d'un arbre dont le quotient par G est isomorphe à $(\{P, Q\}, \{y\}, \mathrm{ad})$ où $\mathrm{ad} : y \mapsto \{P, Q\}$. On a $G_P \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $G_Q \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $G_y \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ est un amalgame.

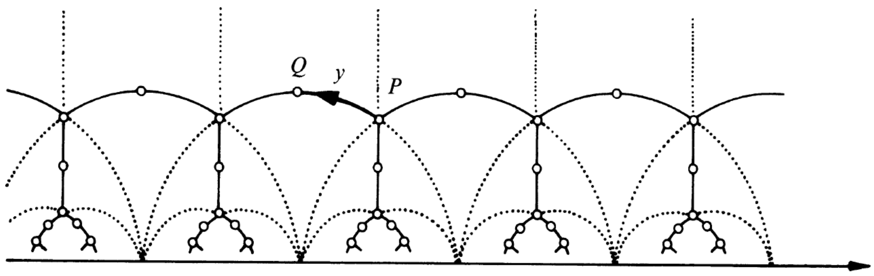

Illustration de [Serre, 1977].

2.2 Propriété (FA)

En fait, on montrera que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ a une propriété plus forte :

Définition 2.6. On dit qu'un groupe a la **propriété (FA)** si son action sur tout arbre a un point fixe.

Théorème 2.7. *Pour qu'un groupe G ait la propriété (FA), il faut et il suffit qu'il satisfasse les propriétés suivantes :*

(1) G n'est pas la réunion d'une suite de sous-groupes strictement croissante.

(2) G n'a pas de quotient isomorphe à $\mathbb{Z}$.

(3) G n'est pas un amalgame non trivial.

Remarque 2.8. Si G est dénombrable, alors (1) est équivalent à ce que G soit finiment engendré.

On montrera "$\Rightarrow$".

Preuve de "$\Rightarrow$". (2) vient de l'exemple 1.18. (3) est clair d'après la sous-section précédente. Pour (1), soient $G_1 \subsetneq G_2 \subsetneq \cdots \subseteq G$ telles que $\bigcup_n G_n = G$. Considérons le graphe dont :

— $V = \coprod_n G/G_n$;

— $E = G \times \mathbb{N}^+$;

— ad : $(g, x) \mapsto \{gG_n, gG_{n+1}\}$.

C'est évidemment un arbre sur lequel G opère par multiplication à gauche. Il y a un point fixe dans G/G_n si et seulement si $G = G_n$. □

2.3 Automorphismes sans point fixe

Définition 2.9. Un **droit chemin** dans un graphe est un sous-graphe isomorphe au droit chemin P_∞.

Théorème 2.10. *Soient T un arbre et φ un automorphisme de T. Alors φ n'a pas de point fixe si et seulement s'il existe un droit chemin P dans T sur lequel φ opère par une translation non triviale. Dans ce cas, P est l'unique droit chemin préservé par φ.*

Preuve. Supposons d'abord qu'il existe un tel P. Si φ fixe un sommet p, notons $[p, P] = [p, q]$, alors $[p, \varphi(q)] = [\varphi(p), \varphi(q)] = \varphi([p, q])$, mais $[p, \varphi(q)] = [p, q] \vee [q, \varphi(q)]$ par le théorème 1.13, donc $q = \varphi(q)$ et φ est une translation triviale sur P, ce qui est une contradiction. Soit Q un droit chemin préservé par φ. Si P et Q se croisent, prenons un sommet $p \in P \cap Q$, alors $\varphi^n(p) \in P \cap Q$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc $P = \bigcup_{n \geq 0} [\varphi^{-n}(p), \varphi^n(p)] = Q$. Sinon, $[P, Q] = [\varphi(P), \varphi(Q)] = \varphi([P, Q])$, ce qui est impossible car φ est une translation non triviale sur P.

Inversement, supposons que φ n'ait pas de point fixe. Soit p un sommet tel que $d(p, \varphi(p))$ soit minimal. Si q est un sommet dans $\mathrm{im}[p, \varphi(p)]$, alors $[q, \varphi(q)] = [q, \varphi(p)] \vee [\varphi(p), \varphi(q)]$ car il est de la bonne longueur. Cet argument montre que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{im}[\varphi^n(p), \varphi^{n+1}(p)]$ est le droit chemin qu'on veut. □

Rappelons la définition d'un groupe nilpotent. Soit G un groupe. Pour $x, y \in G$, on note son commutateur $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Pour deux sous-ensembles $S, T \subset G$, on note $[S, T]$ le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[s, t]$ où $s \in S$, $t \in T$. On définit une suite $(G_n)_n$ récursivement : $G_0 = G$, $G_{n+1} = [G_n, G]$. Le groupe G est dit **nilpotent** s'il existe $n \in \mathbb{N}^+$ tel que G_n soit trivial.

Théorème 2.11. *Soit T un arbre et G un groupe nilpotent finiment engendré non trivial qui opère sur T. Alors on a la dichotomie suivante : Soit G a un point fixe, soit il existe un droit chemin P dans T sur lequel G opère par translations au moyen d'un homomorphisme non trivial $G \to \mathbb{Z}$.*

Preuve. Récurrence sur la longueur d'une suite de Jordan–Hölder de G. Comme G est nilpotent, ses quotients de Jordan–Hölder sont cycliques, donc il existe un sous-groupe normal H de G de longueur inférieure tel que G/H soit cyclique. Si H a un point fixe, considérons l'action de G/H sur T^H. Par le théorème 2.10, soit G/H et donc G a un point fixe, soit il existe un droit chemin sur lequel G/H et donc G opère par translation non triviale. Si $T^H = \varnothing$, alors il existe un droit chemin P sur lequel H opère par un homomorphisme non trivial $H \to \mathbb{Z}$. Comme H est normal et que P est l'unique chemin préservé par H par le théorème 2.10, P est aussi préservé par G, donc l'homomorphisme $H \to \mathbb{Z}$ étend en un homomorphisme $G \to \mathrm{Aut}(T_\infty) \cong \mathbb{Z} \rtimes \{\pm 1\}$ où $-1 : n \mapsto -n$. Si son image n'est pas contenue dans $\mathbb{Z}$, alors elle est isomorphe à $\mathbb{Z} \rtimes \{\pm 1\}$ qui n'est pas nilpotent, une contradiction. □

Corollaire 2.12. *Soit G un groupe nilpotent opérant sur un arbre. Alors tout élément dans $[G, G]$ a un point fixe.*

Preuve. Tout élément dans $[G, G]$ est un produit fini de commutateurs, donc on peut remplacer G par le sous-groupe engendré par les éléments impliqués, et ainsi on peut supposer que G soit finiment engendré. Dans le deuxième cas du théorème, $[G, G]$ est annulé par tout homomorphisme $G \to \mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}$ est commutatif. □

Corollaire 2.13. *Soit G un groupe nilpotent finiment engendré opérant sur un arbre. Si G est engendré par des éléments qui ont des points fixes, alors G a un point fixe.*

Preuve. Sinon un engendreur opère par translation non triviale et donc n'a pas de point fixe par le théorème 2.10. □

2.4 Cas de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$

Lemme 2.14. *Soient T un arbre et T_1, T_2, T_3 trois sous-arbres de T. Si $T_1 \cap T_2 \neq \varnothing$, $T_1 \cap T_3 \neq \varnothing$, $T_2 \cap T_3 \neq \varnothing$, alors $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \neq \varnothing$.*

Preuve. Prenons trois sommets $p \in T_1 \cap T_2$, $q \in T_1 \cap T_3$, $r \in T_2 \cap T_3$, alors $\mathrm{im}[p,q] \subset T_1$, $\mathrm{im}[p,r] \subset T_2$, $\mathrm{im}[q,r] \subset T_3$. Par le théorème 1.12, on a $\mathrm{im}[p,r] \subset \mathrm{im}([p,q] \vee [q,r])$, donc $\mathrm{im}[p,r] \cap \mathrm{im}[p,q] \cap \mathrm{im}[q,r] \neq \varnothing$ par connexité de $\mathrm{im}[p,r]$. □

Théorème 2.15. $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ *a la propriété (FA).*

Par le théorème 2.7, cela montre le théorème 2.1.

Preuve. Soient

$$z_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$z_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad z_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad z_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

où les indices sont modulo 6. On vérifie que :
— $[z_i, z_{i+1}] = 1$ pour tout i.
— $[z_{i-1}, z_{i+1}] = z_i^{\pm 1}$ pour tout i.
Il est connu que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ est engendré par les z_i. Par la deuxième propriété, il est en fait engendré par z_0, z_2, z_4. Pour tout i, soit H_i le groupe engendré par z_{i-1} et z_{i+1}, alors $[H_i, H_i]$ est engendré par z_i, $[H_i, [H_i, H_i]] = 1$, donc H_i est nilpotent. Par le corollaire 2.12, chaque z_i a un point fixe. Par le corollaire 2.13, chaque H_i a un point fixe. Maintenant, $T^{z_1}, T^{z_3}, T^{z_5}$ sont trois arbres qui satisfont le lemme, donc $T^G = T^{z_1} \cap T^{z_3} \cap T^{z_5} \neq \varnothing$. □

3 L'arbre de $\mathrm{SL}_2(K)$

3.1 L'arbre

Soit K un corps commutatif muni d'une valuation discrète $v : K \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cup \infty$. On rappelle que v est une surjection et satisfait :
— $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$,
— $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$,
— $v(x) = \infty$ si et seulement si $x = 0$.
On choisit $\pi \in K$ tel que $v(\pi) = 1$. On peut facilement vérifier que $v(1) = 0$ et $v(a^{-1}) = -v(a)$ pour tout $a \in K - \{0\}$.

On désigne par O l'anneau de valuation de K, *i.e.*, $O = \{x \in K | v(x) \geq 0\}$. On prouve que O est un anneau principal. Pour tout idéal I de O, on choisit $a \in I$ tel que $v(a) = \min\{v(x) | x \in I\}$. Alors, pour tout $b \in I$, on a $v(b) \geq v(a)$ et donc $v(ba^{-1}) = v(b) - v(a) \geq 0$ et $ba^{-1} \in O$. Donc, on a $b = ba^{-1} \cdot a \in aO$ et $I \subseteq aO$. Mais

I est un idéal et donc on a $I = aO$. De plus, puisque $v(\pi^{v(a)} \cdot a^{-1}) = v(a) - v(a) = 0$, $\pi^{v(a)} \cdot a^{-1}$ est un élément inversible dans O. Donc, on a

$$I = aO = \pi^{v(a)}O = \{x | v(x) \geq v(a)\}.$$

Soit V un K-espace vectoriel de dimension 2.

Définition 3.1 (Réseaux)**.** Un **réseau** L de V est un sous-O-module de V qui est de type fini et engendre V comme un K-espace vectoriel.

Un tel module doit être un module libre engendré par deux éléments. Ceci pour la raison suivante. Supposons que L est engendré par au moins n éléments $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Alors, puisqu'ils engendrent V comme K-espace vectoriel, on a $n \geq 2$. Si $n > 2$, on a $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ tels que $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ parce que $dim_K(V) = 2$. Supposons que $v(a_n) = \min\{v(a_i) | 1 \leq i \leq n\}$, on a $v(a_ia_n^{-1}) = v(a_i) - v(a_n) \geq 0$ pour $1 \leq i < n$ et donc $a_ia_n^{-1} \in O$. En attendant, on a $x_n = -(a_1a_n^{-1}x_1 + ... + a_{n-1}a_n^{-1}x_{n-1})$ et donc L est engendré par $n-1$ éléments $x_1, ..., x_{n-1}$, ce qui est en contradiction avec notre choix de n. Donc, L est engendré par deux éléments $\{x_1, x_2\}$. Puisque ils engendrent V comme un espace vectoriel, ils sont linéairement indépendants. Donc, L est un module libre engendré par deux éléments.

Le groupe K^* agit naturellement sur l'ensemble de réseaux par multiplication. Deux réseaux dans la même orbite sont dits **équivalents**. L'orbite contenant L est appelée la **classe** de L. Nous utilisons X pour désigner l'ensemble des orbites. On peut définir une distance sur X par le lemme suivant.

Lemme 3.2. *Soient L et L' deux réseaux. Il existe une O-base $\{e_1, e_2\}$ de L telle que $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\}$ est une O-base de L' pour certains entiers a et b. Et l'ensemble $\{a, b\}$ ne dépend pas du choix de la base $\{e_1, e_2\}$.*

Preuve. Soient $\{x_1, x_2\}$ et $\{y_1, y_2\}$ deux O-bases des L et L' respectivement. On définit $M \in \mathrm{GL}_2(K)$ la matrice de transition entre eux par $(y_1, y_2) = (x_1, x_2) \cdot M$. Alors, chaque O-base $\{x'_1, x'_2\}$ de L a la forme $\{x_1, x_2\} \cdot A$ pour une certaine matrice $A \in \mathrm{GL}_2(O)$. De même, chaque O-base $\{y'_1, y'_2\}$ de L' a la forme $\{y_1, y_2\} \cdot B$ pour une certaine matrice $B \in \mathrm{GL}_2(O)$. On a

$$(y'_1, y'_2) = (y_1, y_2) \cdot B = (x_1, x_2) \cdot MB = (x'_1, x'_2) \cdot A^{-1}MB.$$

Donc, la matrice de transition enter $\{x'_1, x'_2\}$ et $\{y'_1, y'_2\}$ est $A^{-1}MB$. On choisit $N \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi^N \cdot M \in \mathrm{GL}(O)$. Puisque O est un anneau principal, par la forme normale de Smith, on peut choisir $A, B \in \mathrm{GL}(O)$ tels que la matrice $A^{-1} \cdot \pi^N M \cdot B$ est diagonale, et donc $A^{-1}MB$ est diagonale. De plus, on peut supposer que les termes diagonaux de $A^{-1}MB$ sont π^a et π^b pour certains $a, b \in \mathbb{Z}$. On prendre

$\{e_1, e_2\} = \{x'_1, x'_2\}$ comme une O-base de L, alors $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\} = \{y'_1, y'_2\}$ est une O-base de L'. Enfin, l'ensemble $\{a, b\}$ ne dépend pas du choix de la base $\{e_1, e_2\}$ puisque les termes diagonaux de la forme normale sont uniques jusqu'à la multiplication par une unité dans O dont la évaluation doit être 0. $\square$

Maintenant, soient Λ et Λ' deux éléments de X. Supposons que ils sont représentés par deux réseaux L et L' respectivement. On peux choisir e_1, e_2, a, b comme dans le lemme ci-dessus. Alors, on définit la **distance** entre Λ et Λ' par $d(\Lambda, \Lambda') = |a-b|$. Nous devons vérifier que d est bien défini. Nous montrons qu'il ne dépend pas du choix de L et L'. Remplacer L par xL et L' par yL' pour quelques $x, y \in K$. Puisque $L = e_1O \oplus e_2O$ et $L' = e_1\pi^aO \oplus e_2\pi^bO$, on a

$$xL = e_1xO \oplus e_2xO = e_1\pi^{v(x)}O \oplus e_2\pi^{v(x)}O.$$

Et de la même façon, on a

$$yL' = e_1\pi^a yO \oplus e_2\pi^b yO = e_1\pi^a\pi^{v(y)}O \oplus e_2\pi^b\pi^{v(x)}O.$$

Dénotons $(f_1, f_2) = (e_1\pi^{v(x)}, e_2\pi^{v(x)})$. Alors, (f_1, f_2) est une O-base de xL et $(f_1\pi^{a+c}, f_2\pi^{b+c})$ est une O-base de yL', où $c = v(y) - v(x)$. Puisque $|(a + c) - (b + c)| = |a - b|$, la distance ne dépend pas du choix des représentants.

Remarque 3.3. Soient $L \in \Lambda$ et $L' \in \Lambda'$. Supposons que $\{e_1, e_2\}$ est une O-base de L et $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\}$ est une O-base de L'. Alors, chaque réseau L'' dans Λ' a une O-base de la forme $\{e_1\pi^{a+c}, e_2\pi^{b+c}\}$ pour un certain $c \in \mathbb{Z}$. On a $L'' \subseteq L$ si et seulement si $a + c \geq 0$ et $b + c \geq 0$. Donc, il existe un réseau unique L'' dans Λ' satisfaisant $L'' \subseteq L$ et maximal parmi ces réseaux. L'' a une O-base $\{e_1, e_2\pi^{b-a}\}$ si $a \leq b$ et $\{e_1\pi^{a-b}, e_2\}$ si $a \geq b$. Et on a $L/L'' \cong O/\pi^{d(\Lambda,\Lambda')}O$. En particulier, on a

- $d(\Lambda, \Lambda') = 0$ si et seulement si $\Lambda = \Lambda'$,
- $d(\Lambda, \Lambda') = 1$ si et seulement si il existe des représentants $L \in \Lambda$ et $L' \in \Lambda'$ tels que $L' \subseteq L$ et $L/L' \cong k$, où $k = O/\pi O$ est un corps.

Maintenant, nous sommes prêts à définir l'arbre correspondant à V. L'ensemble des sommets est X. Deux sommets Λ et Λ' sont liées si et seulement si $d(\Lambda, \Lambda') = 1$. On vérifie que X est une arbre. D'abord, nous montrons qu'il est connexe. Soient $\Lambda, \Lambda' \in X$. Par la remarque 3.3, on peut choisir deux représentants $L \in \Lambda$ et $L' \in \Lambda'$ tels que $\{e_1, e_2\}$ est une O-base de L et $\{e_1, e_2\pi^c\}$ est une O-base de L' pour un certain entier positif c. Dénotons L_i le réseau engendré par $\{e_1, e_2\pi^i\}$ pour $0 \leq i \leq c$. Alors, $L_0 = L$, $L_c = L'$, L_i et L_{i+1} sont liées parce que $d(L_i, L_{i+1}) = 1$. Donc X est connexe.

Ensuite, nous prouvons que X ne contient pas de boucles. Soit $\Lambda_0, \Lambda_1, ..., \Lambda_n$ un chemin sans aller-retour dans X. Par la remarque 3.3, on peux choisir $L_i \in \Lambda_i, 0 \leq i \leq n$ tels que $L_0 \supset L_1 \supset ... \supset L_n$ et $L_i/L_{i+1} \cong k$. Alors, on a $\pi L_i \subset L_{i+1}$ pour

$0 \leq i < n$. On prouve que $L_n \nsubseteq \pi L_0$ par induction sur n. Puisque on a $\pi L_{n-1} \subset L_n \subset L_{n-1}$ et $\pi L_{n-1} \subset \pi L_{n-2} \subset L_{n-1}$, on peux regarder $L_{n-1}/\pi L_{n-1}$ comme un k-espace vectoriel de dimension 2, et regarder $L_n/\pi L_{n-1}$ et $\pi L_{n-2}/\pi L_{n-1}$ comme deux sous-espaces vectoriels de dimension 1. Alors, on a

$$L_n/\pi L_{n-1} = \pi L_{n-2}/\pi L_{n-1}$$

ou

$$L_{n-1}/\pi L_{n-1} = L_n/\pi L_{n-1} \oplus \pi L_{n-2}/\pi L_{n-1}.$$

Dans le premier cas, on a $L_n = \pi L_{n-2}$ et donc $\Lambda_n = \Lambda_{n-2}$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse que le chemin n'a pas de aller-retour. Dans le deuxième cas, on a $L_n + \pi L_{n-2} = L_{n-1}$, d'où $L_n \equiv L_{n-1} \pmod{\pi L_0}$. Par hypothèse d'induction, on a $L_n \nsubseteq \pi L_0$ car $L_{n-1} \nsubseteq \pi L_0$. Maintenant, on peux choisir une O-base $\{e_1, e_2\}$ de L_0 telle que $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\}$ est une O-base de L_n. Puisque $L_n \subseteq L_0$ et $L_n \nsubseteq \pi L_0$, nous pouvons supposer que $a = 0$ et $b > 0$. Alors, puisque $L_0/L_n \cong O/\pi^b O$, on a

$$b = l(L_0/L_n) = \sum_{i=0}^{n-1} l(L_i/L_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} l(k) = n.$$

Et donc $n = b = |a - b| = d(\Lambda_0, \Lambda_n)$. En particulier, $\Lambda_n \neq \Lambda_0$.

Remarque 3.4. La démonstration ci-dessus montre que $d(\Lambda, \Lambda')$ coïncide avec la distance des sommets Λ et Λ' dans l'arbre X.

3.2 Les sous-groupes de $\mathrm{GL}(V)$

On note $\mathrm{GL}(V)$ le groupe des K-automorphismes de V. Après avoir choisi une K-base de V, on a un isomorphisme $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_2(K)$. On note $\det : \mathrm{GL}(V) \to K^*$ le déterminant. On note $\mathrm{SL}(V)$ le noyau du det, qui est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$.

On considère le composition $v \circ \det : \mathrm{GL}(V) \to K^* \to \mathbb{Z}$ des valuation v et déterminant det. On note $\mathrm{GL}(V)^0$ le noyau de $v \circ \det$, et $\mathrm{GL}(V)^+$ la pré-image de $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Puisque pour chaque $A \in \mathrm{SL}(V)$ on a $v \circ \det(A) = v(1) = 0$, on a la relation suivante :

$$\mathrm{SL}(V) \subset \mathrm{GL}(V)^0 \subset \mathrm{GL}(V)^+ \subset \mathrm{GL}(V).$$

Soient L et L' deux réseaux, on définit $\chi(L, L') := l(L/L'') - l(L'/L'')$ pour un certain réseau $L'' \subset L \cap L'$. Il est clair que cette définition ne dépend pas du choix de L''. Et on a la proposition suivante.

Proposition 3.5. *Soit L un réseau, et soit $s \in \mathrm{GL}(V)$, on a*

$$\chi(L, sL) = v(\det(s)).$$

Preuve. On peux choisir une O-base $\{e_1, e_2\}$ de L telle que $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\}$ est une O-base de sL pour certains $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors, on peux choisir $c \in \mathbb{Z}$ tel que $c \geq max\{-a, -b, 0\}$. On prend le réseau L' engendré par $e_1\pi^{a+c}$ et $e_2\pi^{b+c}$. Alors, on a $L' \subset L \cap sL$ et donc

$$\chi(L, sL) = l(L/L') - l(sL/L') = (a + c) + (b + c) - 2c = a + b.$$

Dénotons s_1 la matrice diagonale de termes diagonaux π^a et π^b. On définit $s_2 = s_1^{-1}s$. Alors, on a $s_1L = sL$ et donc $s_2L = L$. Cela nous dit que $s_2 \in \mathrm{GL}(O)$. Maintenant, on sait que $s_2^{-1} \in \mathrm{GL}(O)$. En particulier, on a $\det(s_2) \in O$ et $\det(s_2^{-1}) \in O$, et donc $v(\det(s_2)) \geq 0$ et $v(\det(s_2^{-1})) \geq 0$. Mais on a

$$v(\det(s_2)) + v(\det(s_2)) = v(\det(s_2) \cdot \det(s_2^{-1})) = v(\det(s_2 \cdot s_2^{-1})) = 0.$$

Donc, on a $v(\det(s_2)) = v(\det(s_2^{-1})) = 0$. Et on sait que

$$v(\det(s)) = v(\det(s_1s_2)) = v(\det(s_1)) + v(\det(s_2)) = v(\det(s_1)).$$

Maintenant, s_1 est une matrice diagonale de termes diagonaux π^a et π^b. Et donc on a

$$v(\det(s)) = v(\det(s_2)) = a + b = \chi(L, sL).$$

□

Remarque 3.6. Par la démonstration de la proposition, pour deux réseaux L et L' on a

$$\chi(L, L') \equiv d(L, L') \pmod 2$$

puisque $a + b \equiv |a - b| \pmod 2$. Et donc si $s \in \mathrm{GL}(V)^+$, on a

$$d(\Lambda, s\Lambda) \equiv d(L, sL) \equiv \chi(L, sL) \equiv v(\det(s)) \equiv 0 \pmod 2$$

pour chaque élément $\Lambda \in X$ et son représentant L.

Remarque 3.7. Contrairement à la distance d qui est définie sur X, χ défini ci-dessus ne passe pas à X.

On peux définit une action de groupe $\mathrm{GL}(V)$ sur l'arbre X par multiplication. Alors, par la remarque 3.6, chaque élément $s \in \mathrm{GL}(V)^+$ opère sur X sans inversion.

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$, et soit Λ un sommet de X et L un réseau dans la classe Λ. On note G_Λ le sous-groupe de G qui contient les éléments qui fixent Λ. On définit G_L de la même manière. Évidemment, on a $G_L \subseteq G_\Lambda$. Et le lemme suivant nous dit quand ces deux sous-groupes coïncident.

Lemme 3.8. *Si G est contenu dans $\mathrm{GL}(V)^0$, on a $G_L = G_\Lambda$ pour tout $L \in \Lambda$ et $\Lambda \in X$.*

Preuve. Soit $s \in G_\Lambda$, on a $sL = xL$ pour un certain $x \in K^*$. Par la proposition 3.5, on a

$$\chi(L, sL) = v(\det(s)) = 0.$$

D'autre part, on peut facilement calculer que $\chi(L, xL) = 2v(x)$. Donc, on a $2v(x) = \chi(L, xL) = \chi(L, sL) = 0$. Donc, on a $\{x, x^{-1}\} \subset O$ et $sL = xL = L$, $s \in G_L$. □

3.3 Actions de groupes et amalgames

Pour une arête $\Lambda\Lambda'$ de X, on dénote son stabilisateur par $G_{\Lambda\Lambda'}$. Évidemment, on a $G_{\Lambda\Lambda'} = G_\Lambda \cap G_{\Lambda'}$. On définit $G_{LL'}$ de la même manière pour des réseaux.

On peux définir une norme sur K comme $|x| := 2^{-v(x)}$ pour tout $x \in K$. Alors, cette norme fait de K un espace topologique. Et on peux voir $GL(V)$ comme un espace topologique.

Théorème 3.9. *Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)^+$. Si l'adhérence de G dans $\mathrm{GL}(V)$ contient $\mathrm{SL}(V)$, alors tout arête $\Lambda\Lambda'$ de X est un domaine fondamental sous l'action de G.*

Preuve. D'abord, par la remarque 3.6, chaque $s \in G \subseteq \mathrm{GL}(V)^+$ opère sur X sans inversion. Soit $\Lambda\Lambda'$ une arête de X, on prouve que il est un domaine fondamental. C'est-à-dire, pour tout arête $\Lambda_0\Lambda_0'$ de X, on prouve que il existe un élément $s \in G$ tel que sons image sous s est $\Lambda\Lambda'$.

On envoie d'abord un sommet du segment $\Lambda_0\Lambda_0'$ à un sommet du segment $\Lambda\Lambda'$. Puisque $|d(\Lambda_0, \Lambda) - d(\Lambda_0', \Lambda)| = 1$, on peut supposer que $d(\Lambda_0, \Lambda) \equiv 0 \pmod 2$. Soient L et L_0 deux représentants de Λ et Λ_0 respectivement. On choisit une O-base $\{e_1, e_2\}$ de L_0 telle que $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\}$ est une O-base de L pour certains a et b. Alors, on a $|a-b| \equiv d(\Lambda_0, \Lambda) \equiv 0 \pmod 2$. Supposons que $a-b = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors, le réseau $\pi^{-b-n}L$ est engendré par $e_1\pi^a \cdot \pi^{-b-n} = e_1\pi^n$ et $e_2\pi^b \cdot \pi^{-b-n} = e_2\pi^{-n}$. On peut remplacer L par $\pi^{-b-n}L$ puisque ils sont dans la même classe Λ. Donc, on peut supposer que $\{e_1\pi^n, e_2\pi^{-n}\}$ est une O-base de L.

On dénote s_1 la matrice diagonale de termes diagonaux π^n et π^{-n}. Alors, on a $s_1L_0 = L$. Puisque $\mathrm{GL}_2(O)$ et ouvert dans $\mathrm{GL}_2(K)$, $s_1 \cdot \mathrm{GL}_2(O)$ est un voisinage ouvert de s_1. Puisque $s_1 \in \mathrm{SL}(V)$ et l'adhérence de G dans $\mathrm{GL}(V)$ contient $\mathrm{SL}(V)$, on a $s_1 \cdot \mathrm{GL}_2(O) \cap G \neq \emptyset$. Donc, on peut choisir $s_2 \in \mathrm{GL}_2(O)$ tel que $s = s_1s_2 \in G$. Alors, on a

$$s \cdot L_0 = s_2 \cdot (s_1 \cdot L_0) = s_2 \cdot L = L.$$

Et donc, il existe $s \in G$ tel que $s\Lambda_0 = \Lambda$.

Maintenant, il suffit de prouver que G_Λ agit transitivement sur les arêtes avec un sommet Λ. On fixe un représentant L de Λ. Par la remarque 3.3, on peut choisir un représentant L' pour chaque arête de ce type tel que $L' \subset L$ et $L/L' \cong k$. Alors, on a $\pi L \subset L' \subset L$ et on peut identifier L' avec un sous-espace de dimension 1 de l'espace k-vectoriel $L/\pi L$. On dénote P_L l'ensemble des sous-espaces de dimension 1 de $L/\pi L$. Alors, le problème est de prouver que G_L agit sur P_L transitivement. Soient $L_1/\pi L$ et $L_2/\pi L$ deux sous-espaces de dimension 1 de $L/\pi L$, il existe un élément de $\mathrm{SL}_2(k)$ qui envoie $L_1/\pi L$ sur $L_2/\pi L$. Puisque $\mathrm{SL}_2(k)$ est engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \text{où } a \in k = O/\pi O,\ \text{ et } \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

on peut trouver une matrice s_1 correspondante dans $\mathrm{SL}_2(O)$ tel que $s_1 L_1 = L_2$. En effet, on peut choisir s_1 comme ci-dessus en remplaçant a par ses représentants dans O.

On dénote U le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(O)$ formé des matrices s telles que $s \equiv id_2 \pmod{\pi}$. Alors, pour tout élément $s \in U$, on a $s \equiv id_2$ dans $\mathrm{SL}_2(k)$, et donc $s\cdot(L_2/\pi L) = L_2/\pi L$ et $s \cdot L_2 = L_2$. Puisque U est un sous-espace ouvert de $\mathrm{GL}(V)$, $s_1 \cdot U$ est un voisinage ouvert de s_1 dans $\mathrm{GL}(V)$. Puisque $s_1 \in \mathrm{SL}(V)$ et l'adhérence de G dans $\mathrm{GL}(V)$ contient $\mathrm{SL}(V)$, on a $s_1 \cdot U \cap G \neq \emptyset$. Donc, on peut choisir $s_2 \in U$ tel que $s = s_1 s_2 \in G$. Alors, on a $sL = L$ puisque $s_1 \in \mathrm{SL}_2(O) \subset \mathrm{GL}_2(O)$ et $s_2 \in U \subset \mathrm{GL}_2(O)$. Alors, on a

$$s \cdot L_1 = s_2 \cdot (s_1 \cdot L_1) = s_2 \cdot L_2 = L_2.$$

Donc, G_L agit sur P_L transitivement. □

Théorème 3.10. *Soit G comme dans le théorème 3.9. Alors, pour tout arête $\Lambda\Lambda'$ de X, G est somme des sous-groupes G_Λ et $G_{\Lambda'}$, amalgamés suivant leur intersection $G_{\Lambda\Lambda'}$, i.e., on a $G \cong G_\Lambda *_{G_{\Lambda\Lambda'}} G_{\Lambda'}$.*

Preuve. Par le théorème 3.9 et la proposition 2.4. □

Corollaire 3.11. *On a $\mathrm{SL}_2(K) = \mathrm{SL}_2(O) *_\Gamma \mathrm{SL}_2(O)$, où*

$$\Gamma = \left\{ M \in \mathrm{SL}_2(O) \text{ tel que } M \equiv \begin{pmatrix}* & *\\ 0 & *\end{pmatrix} \pmod{\pi} \right\}.$$

Preuve. On prend $G = \mathrm{SL}_2(K)$. Évidemment, G satisfait la condition dans le théorème 3.9. Soit $\Lambda\Lambda'$ une arête de X. On peut choisit L, L' deux représentants de Λ, Λ' tels que $\pi L \subset L' \subset L$ par la remarque 3.3. Alors, puisque $G \subset \mathrm{GL}(V)^0$, on a $G_\Lambda = G_L$ et $G_{\Lambda\Lambda'} = G_{LL'}$ par le lemme 3.8. Soit $\{e_1, e_2\}$ une O-base de L telle que $\{e_1, \pi e_2\}$ est une O-base de L'. Alors, dans la K-base $\{e_1, e_2\}$ de V, on a $G_L = \mathrm{SL}_2(O)$ et $G_{\Lambda\Lambda'} = G_{LL'}$ est le sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}_2(O)$. De plus, sous l'isomorphisme $G_{L'} \cong \mathrm{SL}_2(O)$, l'inclusion $G_{LL'} \hookrightarrow G_{L'}$ est donnée par :

$$\phi : G_{LL'} \cong \Gamma \longrightarrow \mathrm{SL}_2(O) \cong G_{L'}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}a & \pi b\\ \pi^{-1} c & d\end{pmatrix}.$$

Par le théorème 3.10, on a $\mathrm{SL}_2(K) = \mathrm{SL}_2(O) *_\Gamma \mathrm{SL}_2(O)$, où l'application de Γ au premier $\mathrm{SL}_2(O)$ est l'inclusion et l'application de Γ au deuxième $\mathrm{SL}_2(O)$ est ϕ. $\square$

Corollaire 3.12. *Soit p un nombre premier, on a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) *_\Gamma \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, où*

$$\Gamma = \left\{ M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \textit{ tel que } M \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod p \right\}.$$

Preuve. On considère $\mathbb{Q}$ avec le p-adic valuation $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. On rappelle que $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$, où $v_p(a)$ est l'exposant de p dans la décomposition de a en produit de facteurs premiers. Alors, l'anneau de valuation est $O = \mathbb{Z}_{(p)}$, la localisation de $\mathbb{Z}$ en (p).

On prend $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$. Puisque l'adhérence de $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ dans $\mathbb{Q}$ contient $O = \mathbb{Z}_{(p)}$, le sous-groupe G satisfait la condition dans le théorème 3.9. Soit $\Lambda\Lambda'$ une arête de X. Soient L et L' deux représentants de Λ et Λ'. Puisque $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) \subset GL_2(\mathbb{Q})^0$, on a $G_\Lambda = G_L = \mathrm{SL}_2(O) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ par le lemme 3.8. Comme dans la démonstration du corollaire 3.11, on sait que $G_{LL'}$ est le sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Par le théorème 3.10, on a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) *_\Gamma \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. $\square$

Références

[Serre, 1977] Serre, Jean-Pierre et Bass, H. (1977). *Arbres, amalgames,* SL_2. Société mathématique de France Paris.